DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM XI

ANDRZEJ MOSTOWSKI

O NIEZALEŻNOŚCI DEFINICJI SKOŃCZONOŚCI W SYSTEMIE LOGIKI

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1938
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się tom I za rok 1922, tom II za rok 1923, tom III za rok 1927, tom IV za rok 1928, tom V za rok 1931, tom VI za rok 1934, tomy VII, VIII i IX za rok 1935, oraz tom X za rok 1937.

DODATEK DO ROCZNIKA
POLSKIEGO TOWARZYSTWA
MATEMATYCZNEGO

TOM XI

ANDRZEJ MOSTOWSKI

O NIEZALEŻNOŚCI DEFINICJI SKOŃCZONOŚCI W SYSTEMIE LOGIKI

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1938
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Andrzej Mostowski

O niezależności definicji skończoności w systemie logiki

Praca niniejsza stanowi wyciąg z obszerniejszego studium, tyczącego pojęcia skończoności zbioru, w którym podajemy rozwiązania szeregu problemów związanych z pojęciem skończoności, a postawionych w przeważającej części przez p. doc. A. Tarskiego. Z problemów tych zwrócimy w pracy obecnej uwagę na jeden tylko, na problem równoważności pojęcia skończoności takiego jak je zdefiniowali Frege i Russell i innego pojęcia skończoności, zdefiniowanego po raz pierwszy przez Dedekinda. Stojąc na gruncie pewnego określonego systemu logiki, wykazujemy, że równoważność dwu tych definicji nie daje się wyprowadzić z samych tylko aksjomatów logicznych, co zresztą stanowi tylko definitywne potwierdzenie od dawna już żywionych przypuszczeń. Badania tego rodzaju związane są ściśle z kwestią niezależności pewnika wyboru, jak wiadomo bowiem równoważność przytoczonych powyżej definicji jest konsekwencją pewnika wyboru; tak więc jako uboczne niejako wnioski z naszych twierdzeń otrzymujemy twierdzenia o niezależności pewnika wyboru i pewnych dość nawet napozór słabych logicznie jego konsekwencji. Wyniki te podane są w § 3.

Badania nasze odnosiliśmy dla określoności do systemu logiki, sformułowanego przez p. A. Tarskiego; krótki opis tego systemu podaliśmy w § 1, w § 3 na str. 52—54 piszemy o możności rozszerzenia naszych rozważań na inne systemy formalne.

W § 2 opisujemy ogólnie metodę, przy pomocy której uzyskane zostały wyniki, podane w § 3.

Wyniki nasze wiążą się ściśle z szeregiem (opublikowanych i częściowo nieopublikowanych) prac logicznych. Tak więc twierdzenia § 3 pozostają w związku z pracami A. Fraenkla, tyczą-

cymi niezależności pewnika wyboru, stanowiąc częściowo ich wzmocnienie i przeniesienie na teren innego systemu podstaw matematyki. Główna myśl metod Fraenkla tkwi i w naszych dowodach, sposób natomiast jej zrealizowania, który budził w pracach Fraenkla szereg poważnych wątpliwości, został zupełnie zmieniony. W tym względzie autor zawdzięcza podstawowe idee p. doc. A. Lindenbaumowi, który w toku wspólnych naszych prac nad uściśleniem dowodów Fraenkla wskazał metodę, która, jak się okazało, stanowi narzędzie, prowadzące do uzyskania żądanych wyników (por. tu też uwagi na str. 53). Myśl zastosowania tu tej metody rzucił był zresztą, o ile nam wiadomo, p. doc. A. Tarski.

Metoda, o jakiej tu mowa, jest to metoda »relatywizacji kwantyfikatorów«, o której piszemy obszernie w § 2. Koncepcja tej metody pochodzi od p. A. Tarskiego, który stosował ją wspólnie z p. A. Lindenbaumem do różnych badań nad układami aksjomatów; niezależnie od polskich logików doszedł i Herbrand do pewnego szczególnego przypadku tej metody (por. tu uwagi wstępne do § 2). Mimo jednak tej dość zdawałoby się bogatej przeszłości metody »relatywizacji kwantyfikatorów« brak w literaturze niemal zupełnie wzmianek o niej, wskutek czego zmuszeni tu byliśmy rozwinąć ją ab ovo z wszelkiemi szczegółami.

Widać z powyższego, że w pracy swej musiał autor w znacznej części referować pojęcia i metody, nie pochodzące od niego samego. Zarówno przy tej pracy, jak i przy formułowaniu wyników, które zdają się być nowe w tym zakresie, korzystał autor wiele z różnorakich rad p. doc. A. Tarskiego, za którego życzliwą i cenną pomoc składa mu tu autor swe głębokie podziękowanie.

Literatura

Prace, cytowane w tekście, oznaczone są nazwiskiem autora i kolejnym numerem wg poniższego spisu.

Bernays, Paul [1]. *A system of axiomatic set theory — part* I. Journal of Symb. Logic, **2** (1937), str. 65—77.

Carnap, Rudolf [1]. *Logische Syntax der Sprache* (1934).

— i Bachmann, Friedrich [1]. *Über Extremalaxiome.* Erkenntnis **6** (1936), str. 166—188.

Chwistek, Leon [1]. *Granice nauki* (1936).

Dedekind, Richard [1]. *Was sind und was sollen die Zahlen.* V wydanie (1923).

Fraenkel, Adolf [1]. *Über den Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms.* Sitzungsberichte d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys. Math. Kl. (1922), str. 253—257.

— [2]. *Einleitung in die Mengenlehre.* IV wydanie (1928).

— [3]. *Sur l'axiome du choix.* L'Enseignement Math. (1935), str. 32—51.

— [4]. *Über eine abgeschwächte Fassung des Auswahlaxioms.* Journal of Symb. Logic, **2** (1937), str. 1—25.

Gödel, Kurt [1]. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.* I. Monatshefte für Math. u. Phys., **38** (1931), str. 173—198.

Herbrand, Jacques [1]. *Recherches sur la théorie de la démonstration.* Travaux de la Soc. des Sci. et des Lettres de Varsovie, **33** (1930).

Kuratowski, Kazimierz [1]. *Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles.* Fund. Math., **2** (1920), str. 161–171.

Lindenbaum, Adolf i Tarski, Alfred [1]. *Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien.* Ergebnisse eines math. Koll., zeszyt **7** (1934), str. 15–22.

— [2]. *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles.* C. R. des séances de la Soc. des Sci. et des Lettres de Varsovie, **19** (1926), Classe III, str. 299–330.

Merzbach, Julius [1]. *Bemerkungen zur Axiomatik der Mengenlehre.* Marburger Inauguraldiss, (1925).

Mirimanoff, Dimitry [1]. *Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes.* I. L'Enseignement Math. **19** (1919), str. 209–217.

Neumann, Johann von [1]. *Zur Einführung der transfiniten Zahlen.* Acta Litt. at Scient. Univ. Hung., **1** (1923), str. 199—208.

— [2]. *Die Axiomatisierung der Mengenlehre.* Math. Zeitschrift, **27** (1928), str. 669—752.

Quine, W. V. [1]. *Set theoretic foundation for Logic.* Journal of Symb. Logic, **1** (1936), str. 45—57.

Robinson, Raphael M. [1]. *The theory of classes; a modification of von Neumann's System.* Journal of Symb. Logic, **2** (1937), str. 29—36.

Russell, Bertrand i Whitehead, Alfred North [1]. *Principia Mathematica.* Tom 2, II wydanie (1927).

Skolem, Thoralf [1]. *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik.* Skrifter utgitt av Det Norske-Videnskaps-Akademi i Oslo. I. Mat.-Nat. Kl., (1929) nr **4**.

Tarski, Alfred [1]. *Sur les ensembles finis.* Fund. Math. **6** (1924), str. 45—95.

— [2]. *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und ω-Vollständigkeit.* Monatshefte für Math. und Phys., **40** (1933), str. 97—112.

— [3]. *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen.* Studia Philosophica, **1** (1936), str. 261—405.

— [4]. *Über unerreichbare Kardinalzahlen.* Fund. Math. **30** (1938), str. 68—89.

— [5]. *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften.* I. Monatshefte für Math. und Phys. **37** (1930), str. 361—404.

— [6]. *Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów.* Przegląd Filozoficzny, **37** (1934), str. 438—460.

Wiener, Norbert [1]. *A simplification of the logic of relations.* Proc. of the Cambridge Phil. Soc., **17** (1912—1914), str. 387—390.

Zermelo, Ernst [1]. *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.* I. Math. Ann., **65** (1908), str. 261—281.

— [2]. *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche.* Fund. Math., **16** (1930), str. 29-47.

---

§ 1. System logiki

W paragrafie bieżącym zamierzamy opisać system logiki, którego dotyczyć będą metalogiczne twierdzenia, jakie ustalimy w następnych paragrafach. Język ten stanowi uściślenie znanego systemu Russella i Whiteheada [1] i sformułowany został po raz pierwszy w postaci zupełnie precyzyjnej przez Tarskiego ([2], por. też Quine [1]). Ponieważ język ten był już wielokrotnie opisywany i dyskutowany, więc nie będziemy tu wdawali się w szczegóły jego budowy, a zadowolimy się powtórzeniem kilku najbardziej podstawowych definicyj.

1. Wyrażeniami języka są skończone napisy, zbudowane z następujących znaków:

(1) »C«, »N«, »Π«,

(2) »$X^{|}_{|}$«, »$X^{|}_{||}$«, »$X^{|}_{|||}$«, ..., »$X^{||}_{|}$«, »$X^{||}_{||}$«, »$X^{||}_{|||}$«, ..., »$X^{|||}_{|}$«, »$X^{|||}_{||}$«, »$X^{|||}_{|||}$«, ..., ...

Znaki (1) reprezentują nazwy znaku implikacji, negacji i kwantyfikatora ogólnego; znaki (2) — t. zw. zmienne — reprezentują odpowiednio nazwy indywiduów, zbiorów indywiduów, klas zbiorów indywiduów itp., tak że w języku rozporządzamy nieograniczoną ilością znaków, służących do oznaczania indywiduów (są to znaki »$X^{|}_{|}$«, »$X^{|}_{||}$«, ...), takąż ilością znaków, służących do oznaczania zbiorów (tj. własności) indywiduów (są to znaki »$X^{||}_{|}$«, »$X^{||}_{||}$«, ...) itp.

2. W metalogice rozważane są własności wyrażeń, należących do systemu logiki, a więc własności pewnych ciągów skończonych, zbudowanych ze znaków (1) i (2) podanych wyżej. Dogodnie jest więc wprowadzić (w metalogice) symbole, służące dla oznaczenia tych wyrażeń i zachodzących między niemi relacji.

2.1. Znak języka, składający się z litery X, k kresek u góry i l kresek u dołu oznaczamy symbolem X_l^k (dla $k, l = 1, 2, 3, \ldots$). Symbole »C«, »N«, »Π« oznaczać będziemy po prostu znakami »C«, »N«, »Π«. Dowolne wyrażenia oznaczać będziemy z reguły literami $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu$; litery $\alpha, \beta, \ldots$ są to więc zmienne (systemu metalogiki), których wartościami są dowolne wyrażenia. Warto może zaznaczyć, że znaki X_l^k ($k, l = 1, 2, \ldots$), które *oznaczają* zmienne systemu logiki, są *stałymi* systemu metalogiki — w odróżnieniu od znaków $\alpha, \beta, \ldots$. Wyrażenie, składające się z dwu wyrażeń α, β napisanych jedno po drugim (α na pierwszym, β na drugim miejscu), oznaczamy przez $\alpha\beta$. Tak np. »$CX_1^2 X_2^3 NX_1^1$« jest nazwą wyrażenia »$\mathbf{CX}_{|}^{||} \mathbf{X}_{||}^{|||} \mathbf{NX}_{|}^{|}$«.

2.2. W 2.1 objaśniliśmy intuicyjny sens szeregu symboli, którymi bezustannie będziemy się posługiwali, korzystając przy tym z najrozmaitszych własności pojęć, oznaczonych przez te symbole, a więc np. z praw takich jak $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ i wielu innych. Przy systematycznej budowie metalogiki, traktuje się symbole, wprowadzone w 2.1 jako wyrażenia pierwotne specjalnej nauki (mianowicie metalogiki) i sens ich określa się na drodze aksjomatycznej. Układ aksjomatów, wystarczający dla zbudowania interesującego nas tu systemu metalogiki podany został przez Tarskiego (por. [2], str. 100 i [3], str. 289), od którego też pochodzi w ogóle myśl budowania metasystemów w postaci aksjomatycznej. Wszystkie prawa, o których wspomnieliśmy wyżej i na których będziemy się ustawicznie opierać, wyprowadzić się dają z zacytowanych aksjomatów. Ze względu jednak na wielkie techniczne trudności, jakie związane byłyby ze szczegółowym wyprowadzaniem praw metalogicznych z aksjomatów, nie będziemy uzasadniali naszych twierdzeń formalnie, a opierać się będziemy na przesłankach czysto intuicyjnych. Dodajmy, że prócz drogi aksjomatycznej posługiwać się też można inną metodą dla precyzyjnego traktowania metalogiki: jest to metoda arytmetyzacji, którą wprowadził Gödel (por. jego pracę [1], a nadto Carnap [1], str. 47—51 i 69; Tarski [2], str. 100 wspomina o możności zinterpretowania aksjomatów metalogiki w arytmetyce, co w gruncie rzeczy daje to samo, co metoda arytmetyzacji).

2.3. Dla nadania naszym oznaczeniom charakteru jakiej takiej przejrzystości wprowadzimy szereg symboli, które pozwolą nam

upodobnić symbolikę do symboliki Hilberta (w definicjach poniższych k, l, m przebiegają liczby naturalne):

2.31. $\alpha \rightarrow \beta \overset{Df}{=} C\alpha\beta$;

2.32. $\bar{\alpha} \overset{Df}{=} N\alpha$;

2.33. $\alpha \vee \beta \overset{Df}{=} \bar{\alpha} \rightarrow \beta$;

2.34. $\alpha \& \beta \overset{Df}{=} \overline{\bar{\alpha} \vee \bar{\beta}}$;

2.35. $\alpha \leftrightarrow \beta \overset{Df}{=} (\alpha \rightarrow \beta) \& (\beta \rightarrow \alpha)$;

2.36. $(X_l^k)\alpha \overset{Df}{=} \Pi X_l^k \alpha$;

2.37. $(EX_l^k)\alpha \overset{Df}{=} \overline{(X_l^k)\bar{\alpha}}$;

2.38. $X_l^k \varepsilon X_m^{k+1} \overset{Df}{=} X_l^k X_m^{k+1}$;

2.39. $X_l^k Id X_m^k \overset{Df}{=} (X_l^{k+1})[X_l^k \varepsilon X_l^{k+1} \rightarrow X_m^k \varepsilon X_l^{k+1}]$.

W związku z tymi definicjami por. Tarski [2], def. 1—4.

Zwróćmy uwagę, że wyrażenia $X_l^k \varepsilon X_m^{k+1}$ i $X_l^k Id X_m^k$ są to pewne funkcje trzech zmiennych naturalnych k, l, m; byłoby więc zgodniejsze z tradycyjnym sposobem oznaczania funkcji, gdybyśmy zamiast $X_l^k \varepsilon X_m^{k+1}$ wzgl. $X_l^k Id X_m^k$ używali znaków w rodzaju $\varepsilon_{k,l,m}$ wzgl. $Id_{k,l,m}$. Ze względu jednak na wielką nieprzejrzystość takiego sposobu znakowania w logice użyliśmy w definicjach 2.38 i 2.39 innego znakowania, które, jak sądzimy, ułatwia odczytywanie wzorów logicznych. Analogiczne uwagi dotyczą szeregu dalszych definicji.

3. Pojęcie funkcji zdaniowej definiuje się indukcyjnie: wyrażenia $X_l^k \varepsilon X_m^{k+1}$ $(k, l, m = 1, 2, \ldots)$ nazywamy funkcjami zdaniowymi rzędu 1; jeśli α, β są to funkcje zdaniowe rzędu co najwyżej n to wyrażenia $\alpha \rightarrow \beta$, $\bar{\alpha}$, $(X_l^k)\alpha$ $(k, l = 1, 2, \ldots)$ nazywamy funkcjami zdaniowymi rzędu co najwyżej $n+1$. Wyrażenie α jest funkcją zdaniową, gdy istnieje liczba n taka, że α jest funkcją zdaniową rzędu n; klasę tych wyrażeń oznaczamy przez S.

Zmienna X_l^k, występująca na pewnym miejscu w funkcji zdaniowej α może być na tym miejscu wolną, lub związaną; definicję tego pojęcia podaje Tarski [2], Def. 6. Zbiór zmiennych, które są na jednym choć miejscu wolne (wzgl. związane) w funkcji zdaniowej α oznaczamy przez $Fr(\alpha)$ (wzgl. $Gb(\alpha)$); przyjmujemy nadto $Vr(\alpha) = Fr(\alpha) + Gb(\alpha)$.

4. Na zakończenie opiszemy pojęcie konsekwencji w odniesieniu do omawianego tu systemu logiki.

4.1. Przez L oznaczamy zbiór, zawierający wyrażenia następujące:

4.11. $\bar{\alpha} \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, $(\bar{\alpha} \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$, $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow [(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$ (dla dowolnych α, β, $\gamma \epsilon S$);

4.12. $(EX_m^{k+1})(X_l^k)[X_l^k \varepsilon X_m^{k+1} \leftrightarrow \alpha]$ dla $m, k, l = 1, 2, \ldots$ i $\alpha \epsilon S$ przy czym jednak $X_m^{k+1} \bar{\epsilon} Fr(\alpha)$;

4.13. $(X_l^k)(X_l^k \varepsilon X_m^{k+1} \leftrightarrow X_l^k \varepsilon X_n^{k+1}) \rightarrow X_m^{k+1} Id X_n^{k+1}$ $(k, l, m, n = 1, 2, \ldots)$.

Funkcje zdaniowe zbioru L nazywać będziemy aksjomatami logiki.

4.2. Mówimy, że wyrażenie α powstało z β przez podstawienie zmiennej X_l^k za zmienną X_m^k jeżeli α tym tylko różni się od β, że na miejscach, gdzie w β występuje X_l^k jako zmienna wolna — tam w α występuje X_m^k też jako zmienna wolna. Piszemy wówczas $\alpha = Sb_{m|l}^{k}(\beta)$; iteracje funkcji Sb oznaczamy krótko wzorem $\alpha = Sb_{m_1|l_1}^{k_1} {}_{m_2|l_2}^{k_2} \cdots {}_{m_n|l_n}^{k_n} (\beta)$. (Dokładniejszy opis operacji podstawiania podaje Tarski [2], def. 8).

4.3. Mówimy, że wyrażenie α powstało z wyrażeń β, γ przez odrywanie, gdy $\gamma = \beta \rightarrow \alpha$.

4.4. Mówimy, że wyrażenie α powstało z wyrażenia β przez dołączenie kwantyfikatora, gdy istnieją wyrażenia γ, δ i zmienna $X_l^k \bar{\epsilon} Fr(\gamma)$ takie, że $\beta = \gamma \rightarrow \delta$ i $\alpha = \gamma \rightarrow (X_l^k)\delta$.

4.5. Mówimy, że wyrażenie α powstało z wyrażenia β przez opuszczanie kwantyfikatora, gdy istnieją wyrażenia γ, δ i zmienna X_l^k takie, że $\beta = \gamma \rightarrow (X_l^k)\delta$ i $\alpha = \gamma \rightarrow \delta$.

4.6. Niech M oznacza dowolny zbiór funkcyj zdaniowych. Mówimy, że α jest konsekwencją rzędu 1 zbioru M, gdy $\alpha \epsilon M + L$. Jeśli α, β są konsekwencjami rzędu co najwyżej n zbioru M, to każde wyrażenie γ powstające z α i β przez jedną z operacyj 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 nazywamy konsekwencją rzędu co najwyżej $n+1$ zbioru M. Wyrażenie α dla którego istnieje liczba naturalna n taka, że α jest konsekwencją rzędu n zbioru M nazywamy konsekwencją M; zbiór konsekwencji M oznaczamy przez $Fl(M)$; zbiór $Fl(L)$ oznaczamy krótko przez T, jego elementy nazywamy tezami.

W ten sposób zdefiniowaliśmy dla systemu logiki dwa istotne pojęcia, charakteryzujące każdy język sformalizowany: pojęcie wyrażenia sensownego (3) i pojęcie konsekwencji (4.6). (Myśl ta leży u podstawy pewnych spośród prac Tarskiego o metodologii nauk dedukcyjnych; por. zwłaszcza Tarski [5], a nadto Carnap [1], str. 120—123).

5. Dalszą część tego paragrafu poświęcimy na wprowadzenie szeregu skrótów symbolicznych typu takiego, jak definicje 2.31—2.39 i wskazanie tez, zbudowanych przy pomocy tych skrótów. Dowody, że te funkcje zdaniowe są istotnie tezami (tj. należą do zbioru T) otrzymuje się bądź przez przeniesienie do naszego systemu logiki rozumowań podanych w Princ. Math., bądź też przez sformalizowanie łatwych rozumowań matematycznych; nie będziemy więc przeciążali pracy podawaniem tych dość żmudnych, formalnych rachunków.

5.1. Podamy przede wszystkim lemmaty, dotyczące funkcji zdaniowej $X_l^k Id X_m^k$, wprowadzonej w 2.39.

5.11. Lemmat: a) $X_k^p Id X_l^p \,\&\, X_k^p Id X_m^p \rightarrow X_l^p Id X_m^p \in T$;

b) $X_k^p Id X_k^p \in T$.

5.12. Lemmat: *niech* $\alpha \in S$, $X_l^k \in Fr(\alpha)$; *niech* β *oznacza wyrażenie, powstające z* α *przez zastąpienie zmiennej* X_l^k *na jednym z miejsc, w których zmienna ta jest wolna w* α *inną zmienną* X_m^k, *która przy tym ma być na tym miejscu zmienną wolną w* β. *Przy tych założeniach zachodzi*

$$X_l^k Id X_m^k \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta) \in T.$$

Dowód tego lemmatu podany został przez Tarskiego i referowany na ćwiczeniach seminaryjnych w r. 1934; nie będziemy reprodukowali tu tego dowodu, który otrzymuje się przez indukcję wzgl. rzędu funkcji zdaniowej α.

5.2. Wprowadzimy obecnie dwa skróty następujące ($p, k, l = 1, 2, \ldots$):

5.21. $X_k^{p+1} \subseteq X_l^{p+1} \overset{Df}{=} (X_k^p)\,[X_k^p \,\varepsilon\, X_k^{p+1} \rightarrow X_k^p \,\varepsilon\, X_l^{p+1}]$;

5.22. $X_k^{p+1} \subset X_l^{p+1} \overset{Df}{=} X_k^{p+1} \subseteq X_l^{p+1} \,\&\, \overline{X_k^{p+1} Id X_l^{p+1}}$.

Funkcja zdaniowa $X_k^{p+1} \subseteq X_l^{p+1}$ wyraża myśl, że zbiór $p+1$-go typu, oznaczony symbolem X_k^{p+1}, pozostaje w stosunku inkluzji niewłaściwej do zbioru $p+1$-go typu, oznaczonego symbolem X_l^{p+1}; funkcja zdaniowa $X_k^{p+1} \subset X_l^{p+1}$ wyraża myśl, że między

wspomnianymi zbiorami zachodzi stosunek inkluzji właściwej. Warto może zaznaczyć, że użycie w definicji 5.22 takiego samego znaku »$\subset$«, jakiego używamy na oznaczenie relacji inkluzji, nie powinno prowadzić do nieporozumień, gdyż używać będziemy innych znaków dla oznaczania zbiorów (a mianowicie znaków M, N, P, A, B, ...), a innych na oznaczenie zmiennych systemu logiki. Tak np. »$M \subset N$« jest wyrażeniem, stwierdzającym, że między zbiorami M i N zachodzi stosunek inkluzji (niewłaściwej), »$X_1^2 \subset X_2^2$« zaś jest nazwą wyrażenia

$$\boldsymbol{NC\Pi X_{|}^{|}\, CX_{|}^{|}\, X_{|}^{||}\, X_{|}^{|}\, X_{||}^{|}\, N\Pi X_{|}^{|||}\, NCCX_{|}^{|}\, X_{|}^{|||}\, NCX_{||}^{|}\, X_{|}^{|||}}.$$

5.3. Następny skrót określimy wzorem

5.31. $P(X_k^{p+2}; X_l^p, X_m^p) \stackrel{Df}{=} (X_k^{p+1})(X_k^{p+1} \varepsilon X_k^{p+2} \leftrightarrow \{(X_n^p)(X_n^p \varepsilon X_k^{p+1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow X_n^p Id X_l^p) \vee (X_n^p)[X_n^p \varepsilon X_k^{p+1} \leftrightarrow (X_n^p Id X_l^p \vee X_n^p Id X_m^p)]\})$,

przy czym $n = \max(l, m) + 1$.

Łatwo dostrzec, że funkcja zdaniowa, stojąca po prawej stronie definicji 5.31 orzeka, że zbiór, oznaczony symbolem X_k^{p+2} jest parą uporządkowaną przedmiotów, oznaczonych symbolami X_l^p, X_m^p. (Parę uporządkowaną $[\mu_1, \mu_2]$ przedmiotów μ_1, μ_2 określamy jak zwykle wzorem $[\mu_1, \mu_2] = \{\{\mu_1\}, \{\mu_1, \mu_2\}\}$; por. W i e n e r [1], K u r a t o w s k i [1], str. 171).

5.4. Przystąpimy obecnie do wprowadzenia skrótów dla kilku dalszych funkcji zdaniowych.

5.41. $R(X_k^{p+3}) \stackrel{Df}{=} (X_k^{p+2})[X_k^{p+2} \varepsilon X_k^{p+3} \rightarrow$
$\rightarrow (EX_k^p)(EX_{k+1}^p) P(X_k^{p+2}; X_k^p, X_{k+1}^p)]$;

5.42. $Z(X_k^{p+3}; X_l^p, X_m^p) \stackrel{Df}{=} (EX_k^{p+2})[P(X_k^{p+2}; X_l^p, X_m^p) \,\&\, X_k^{p+2} \varepsilon X_k^{p+3}]$;

5.43. $D(X_k^{p+3}; X_l^{p+1}) \stackrel{Df}{=} (X_k^p)[X_k^p \varepsilon X_l^{p+1} \leftrightarrow (EX_{k+1}^p) Z(X_k^{p+3}; X_k^p, X_{k+1}^p)]$;

5.44. $\mathfrak{C}(X_k^{p+3}; X_l^{p+1}) \stackrel{Df}{=} (X_k^p)[X_k^p \varepsilon X_l^{p+1} \leftrightarrow (EX_{k+1}^p) Z(X_k^{p+3}; X_{k+1}^p, X_k^p)]$;

5.45. $J(X_k^{p+3}) \stackrel{Df}{=} (X_k^p)(X_{k+1}^p)(X_{k+2}^p)\{[Z(X_k^{p+3}; X_k^p, X_{k+1}^p) \,\&$
$\&\, Z(X_k^{p+3}; X_k^p, X_{k+2}^p) \vee Z(X_k^{p+3}; X_{k+1}^p, X_k^p) \,\&\, Z(X_k^{p+3}; X_{k+2}^p, X_k^p)] \rightarrow$
$\rightarrow X_{k+1}^p Id X_{k+2}^p\}$.

Funkcja zdaniowa $R(X_k^{p+3})$ wyraża myśl, że zbiór oznaczony symbolem X_k^{p+3} zawiera jako elementy wyłącznie pary uporządkowane, tj. jest relacją dwójkową. Funkcja zdaniowa $Z(X_k^{p+3}; X_l^p, X_m^p)$ wyraża myśl, że para uporządkowana przedmiotów, oznaczonych

odpowiednio symbolami X_l^p, X_m^p jest elementem zbioru oznaczonego symbolem X_k^{p+3}; w szczególności więc jeśli zbiór ten jest relacją dwójkową R, to funkcja zdaniowa $Z(X_k^{p+3}; X_l^p, X_m^p)$ wyraża myśl, że relacja R zachodzi między przedmiotami, oznaczonymi odpowiednio przez symbole X_l^p, X_m^p. Funkcja zdaniowa $D(X_k^{p+3}; X_l^{p+1})$ wzgl. $\mathit{C}\!\!\!\mathit{I}(X_k^{p+3}; X_l^{p+1})$ wyraża — w przypadku, gdy zbiór oznaczony symbolem X_k^{p+3} jest relacją dwójkową R — myśl, że zbiór, oznaczony symbolem X_l^{p+1} jest dziedziną R wzgl. przeciwdziedziną R. Przy tym samym założeniu wyraża funkcja zdaniowa $J(X_k^{p+3})$ myśl, że relacja R jest jednojednoznaczna.

5.5. Z kolei określimy funkcję zdaniową, wyrażającą induktywność zbioru (por. Russell i Whitehead [1], *120.01 i 02).

5.51. $O(X_k^2; X_l^2, X_m^1) \overset{Df}{=} (X_{m+1}^1)[X_{m+1}^1 \varepsilon X_k^2 \longleftrightarrow (X_{m+1}^1 \varepsilon X_l^2 \vee X_{m+1}^1 \, Id \, X_m^1)]$;

5.52. $S(X_k^2) \overset{Df}{=} (X_k^3)\{(X_{k+1}^2)[(X_k^1)\overline{(X_k^1 \varepsilon X_{k+1}^2)} \rightarrow X_{k+1}^2 \varepsilon X_k^3] \,\&$
$\& (X_{k+1}^2)(X_{k+2}^2)(X_k^1)[O(X_{k+1}^2; X_{k+2}^2, X_k^1) \,\&\, X_{k+2}^2 \varepsilon X_k^3 \rightarrow$
$\rightarrow X_{k+1}^2 \varepsilon X_k^3] \rightarrow X_k^2 \varepsilon X_k^3\}$.

Funkcja zdaniowa $O(X_k^2; X_l^2, X_m^1)$ orzeka, że zbiór oznaczony symbolem X_k^2 powstaje ze zbioru oznaczonego symbolem X_l^2 przez dodanie doń jedynego elementu, mianowicie elementu oznaczonego symbolem X_m^1. Funkcja zdaniowa $S(X_k^2)$ stwierdza, że zbiór oznaczony symbolem X_k^2 należy do każdej klasy, która zawiera zbiór pusty i jest domknięta ze względu na operację dodawania jednego elementu tj., że zbiór ten jest skończony (induktywny) w sensie Principia Mathematica.

5.53. Podamy bez dowodów kilka lemmatów, dotyczących tych dwu funkcyj zdaniowych:

5.531. Lemmat: $[(X_k^1)\overline{X_k^1 \varepsilon X_k^2}] \rightarrow S(X_k^2) \in T$;

5.532. Lemmat: $O(X_k^2; X_l^2, X_m^1) \,\&\, S(X_l^2) \rightarrow S(X_k^2) \in T$;

5.533. Lemmat: a) $(EX_k^2)S(X_k^2) \in T$; b) $(EX_k^2)S(X_k^2) \,\&\, X_m^1 \varepsilon X_k^2 \in T$;

5.534. Lemmat: $(EX_k^2)\overline{S(X_k^2)} \rightarrow [(X_k^1)(X_k^1 \varepsilon X_l^2) \rightarrow \overline{S(X_l^2)}] \in T$;

5.535. Lemmat: $(X_k^1)[X_k^1 \varepsilon X_k^2 \longleftrightarrow (X_k^1 \varepsilon X_{l_1}^2 \vee X_k^1 \varepsilon X_{l_2}^2 \vee \ldots \vee X_k^1 \varepsilon X_{l_p}^2)] \,\&$
$\& S(X_{l_1}^2) \,\&\, \ldots \,\&\, S(X_{l_p}^2) \rightarrow S(X_k^2) \in T$ dla $p = 1, 2, \ldots$;

5.536. Lemmat: $S(X_k^2) \longleftrightarrow (X_k^3)\{(X_{k+1}^2)[(X_k^1)\overline{(X_k^1 \varepsilon X_{k+1}^2)} \rightarrow X_{k+1}^2 \varepsilon X_k^3] \,\&$
$\& (X_{k+1}^2)(X_{k+2}^2)(X_k^1)[X_{k+1}^2 \varepsilon X_k^3 \,\&\, S(X_{k+1}^2) \,\&$
$\& S(X_{k+2}^2) \,\&\, O(X_{k+2}^2; X_{k+1}^2, X_k^1) \rightarrow X_{k+2}^2 \varepsilon X_k^3] \rightarrow X_k^2 \varepsilon X_k^3\} \in T$.

Treść intuicyjna tych lemmatów nie budzi żadnych wątpliwości; lemmat 5.536 podaje pewien warunek konieczny i dostateczny induktywności zbioru.

5.6. Podamy wreszcie ostatnią grupę skrótów dla funkcyj zdaniowych, które grać będą w dalszym ciągu ważną rolę:

5.61. $G(X^4_n) \overset{Df}{=} J(X^4_n) \,\&\, R(X^4_n) \,\&\, (EX^2_n)[(X^1_n)(X^1_n \varepsilon X^2_n) \,\&$

$\&\, D(X^4_n;\, X^2_n) \,\&\, C(X^4_n;\, X^2_n)]$;

5.62. $B_1(X^4_k;\, X^1_l,\, X^1_m) \overset{Df}{=} G(X^4_k) \,\&\, Z(X^4_k;\, X^1_l,\, X^1_m)$;

$B_{i+1}(X^4_k;\, X^{i+1}_l, X^{i+1}_m) \overset{Df}{=} (X^4_k) \,\&$

$\&(X^i_{k+1})(X^i_{k+2})[B_i(X^4_k; X^i_{k+1}, X^i_{k+2}) \rightarrow (X^i_{k+1} \varepsilon X^{i+1}_l \leftrightarrow X^i_{k+2} \varepsilon X^{i+1}_m)]$

przy założeniu, że $X^4_k \neq X^{i+1}_l$ i $X^4_k \neq X^{i+1}_m$);

5.63. $N_i(X^4_k;\, X^i_l) \overset{Df}{=} B_i(X^4_k;\, X^i_l,\, X^i_l)$ (dla $X^4_k \neq X^i_l$);

5.64. $N^*(X^4_k; X^2_l) \overset{Df}{=} (X^1_l)[X^1_l \varepsilon X^2_l \rightarrow N_1(X^4_k;\, X^1_l)]$;

5.65. $C(X^{i+1}_k; X^{i+1}_l) \overset{Df}{=} (X^i_k)[X^i_k \varepsilon X^{i+1}_k \leftrightarrow \overline{X^i_k \varepsilon X^{i+1}_l}]$.

Treść tych funkcyj zdaniowych jest nader prosta: funkcja $G(X^4_n)$ orzeka, że przedmiot oznaczony symbolem X^4_n jest funkcją, przekształcającą wzajemnie jednoznacznie klasę wszystkich indywiduów w siebie. Każda taka funkcja f przekształca dowolne indywiduum μ w »f-obraz μ« oznaczany symbolem $f(\mu)$, zbiór $\mu = \{\mu', \mu'', \ldots\}$ — w »f-obraz μ« $\{f(\mu'), f(\mu''), \ldots\}$ i ogólnie każdy zbiór μ typu i przekształcony zostaje w »f-obraz μ«, który jest też zbiorem typu i i który zawiera jako elementy wszystkie f-obrazy elementów μ. Por. T a r s k i [6], str. 431 oraz C a r n a p i B a c h m a n n [1], § 2.

Funkcja zdaniowa $B_i(X^4_k; X^i_l, X^i_m)$ orzeka, że zbiór oznaczony symbolem X^4_k jest funkcją f, przekształcającą jednojednoznacznie zbiór wszystkich indywiduów w siebie i że przy tym f-obrazem zbioru, oznaczonego symbolem X^i_l, jest zbiór, oznaczony symbolem X^i_m; funkcja zdaniowa $N_i(X^4_k; X^i_l)$ orzeka, że zbiór oznaczony symbolem X^4_k jest funkcją jednojednoznaczną f, przekształcającą zbiór wszystkich indywiduów w siebie i że przy tym f-obraz zbioru oznaczonego symbolem X^i_l jest z nim samym identyczny. Sens funkcyj $N^*(X^4_k; X^2_l)$ i $C(X^{i+1}_k, X^{i+1}_l)$ nie powinien budzić żadnych wątpliwości.

5.66. Podamy bez dowodu kilka prostych tez, dotyczących tych funkcyj:

5.661. Lemmat: *jeśli* a *jest funkcją zdaniową i przy tym* $X^{p_1}_{q_1}, \ldots, X^{p_n}_{q_n}$ *są to wszystkie zmienne wolne tej funkcji, jeśli dalej zmienne* $X^{p_1}_{r_1}, \ldots, X^{p_n}_{r_n}$ *spełniają warunki: zmienna* $X^{p_i}_{r_i}$ *wstawiona zamiast* $X^{p_i}_{q_i}$ *do wyrażenia* a *na tych miejscach, w których* $X^{p_i}_{q_i}$ *jest w* a *wolne nie staje się na żadnym z tych miejsc zmienną związaną* $(i=1, 2, \ldots n)$, *jeśli wreszcie* $X^4_j \mp X^{p_1}_{q_1}, X^{p_1}_{r_1}, \ldots, X^{p_n}_{q_n}, X^{p_n}_{r_n}$, *to*

$$B_{p_1}(X^4_j;\, X^{p_1}_{q_1}, X^{p_1}_{r_1}) \,\&\, B_{p_2}(X^4_j;\, X^{p_2}_{q_2}, X^{p_2}_{r_2}) \,\&\, \ldots \,\&\, B_{p_n}(X^4_j;\, X^{p_n}_{q_n}, X^{p_n}_{r_n}) \rightarrow$$
$$\rightarrow [a \leftrightarrow Sb^{p_1\ \ p_2\ \ldots\ p_n}_{r_1|q_1\ r_2|q_2\ \ldots\ r_n|q_n}(a)] \,\epsilon\, T.$$

Lemmat ten udowodniony został przez Tarskiego i Lindenbauma i podany w ich pracy [1] (tw. 1). Dowód nie trudno zrekonstruować, postępując przez indukcję względem rzędu funkcji zdaniowej a.

5.662. Lemmat: $G(X^4_k) \,\&\, N^*(X^4_k; X^2_l) \,\&\, X^2_m \subseteq X^2_l \rightarrow N^*(X^4_k; X^2_m) \epsilon T$.

Lemmat ten stwierdza, że z aksjomatów wyprowadzić się daje zdanie, o następującym sensie intuicyjnym: jeśli funkcja f przekształca każdy element zbioru M w siebie i N jest podzbiorem M, to f przekształca każdy element N w siebie.

5.663. Lemmat: $G(X^4_k) \,\&\, (X^1_j)(X^1_j \,\varepsilon\, X^2_j) \rightarrow N_2(X^4_k; X^2_j) \,\epsilon\, T$.

5.664. Lemmat: $G(X^4_k) \,\&\, (X^2_j)[X^2_j \,\varepsilon\, X^3_j \leftrightarrow S(X^2_j)] \rightarrow N_3(X^4_k; X^3_j) \,\epsilon\, T$.

Lemmaty te stwierdzają wyprowadzalność z aksjomatów logiki zdań o następującym sensie: zbiór, zawierający wszystkie indywidua i zbiór, zawierający wszystkie zbiory induktywne są przekształcone w siebie przez każdą funkcję jednojednoznaczną, która zbiór wszystkich indywiduów przekształca w siebie.

5.665. Lemmat: *jeśli* $X^4_m \mp X^i_k$, *to*

a) $G(X^4_m) \rightarrow (EX^i_{k+m}) B_i(X^4_m; X^i_k, X^i_{k+m}) \,\epsilon\, T$;

b) $G(X^4_m) \rightarrow (EX^i_{k+m}) B_i(X^4_m; X^i_{k+m}, X^i_k) \,\epsilon\, T$.

5.666. Lemmat: *jeśli* $X^4_m \mp X^i_h, X^i_k, X^i_l$, *to*

a) $B_i(X^4_m; X^i_h, X^i_k) \,\&\, B_i(X^4_m; X^i_l, X^i_k) \rightarrow X^i_h \, Id X^i_l \,\epsilon\, T$;

b) $B_i(X^4_m; X^i_k, X^i_h) \,\&\, B_i(X^4_m; X^i_k, X^i_l) \rightarrow X^i_h \, Id X^i_l \,\epsilon\, T$.

Cztery te lemmaty, które dowodzi się przez indukcję względem i stwierdzają łącznie wyprowadzalność z aksjomatów logiki zdania następującego: dla każdej funkcji f, przekształcającej

jednojednoznacznie zbiór wszystkich indywiduów w siebie i dla każdego zbioru μ (dowolnego typu) jest jednoznacznie wyznaczony f-obraz i f-przeciwobraz μ, który przy tym zawsze istnieje.

5.667. Lemmat: $C(X_k^2; X_l^2) \& (EX_m^2)[C(X_m^2; X_l^2) \& S(X_m^2)] \rightarrow$
$\rightarrow S(X_k^2) \epsilon T.$

Słuszność tego lemmatu wynika z lemmatu 5.12 i uwagi, że jednoznaczność operacji uzupełniania uzasadnić się daje na terenie systemu logiki.

5.668. Lemmat: $C(X_k^2; X_l^2) \leftrightarrow C(X_l^2; X_k^2) \epsilon T.$

Lemmat ten orzeka, że zdanie: uzupełnienie uzupełnienia dowolnego zbioru jest identyczne z tym zbiorem — jest wyprowadzalne z aksjomatów logiki.

6. W poprzednich numerach podaliśmy zwięzły opis języka, który stanowić będzie przedmiot rozważań dalszego ciągu tej pracy. Nie mogliśmy tu oczywiście podać wszystkich twierdzeń i definicyj, jakie zostały dla badań nad tym językiem wprowadzone, czytelnik znaleźć je może w pracach Tarskiego [2] i [3]. Wspomnimy tu tylko o jednej definicji:

6.1. i-tem podwyższeniem typu funkcji zdaniowej α nazywamy funkcję zdaniową, która powstaje z wyrażenia α przez zastąpienie w nim każdej zmiennej $X_n^m \epsilon Vr(\alpha)$ zmienną X_n^{m+i} $(i, m, n = 1, 2 \ldots)$ (por. Gödel [1], Def. 33, str. 184). i-te podwyższenie typu funkcji zdaniowej α oznaczać będziemy przez α^i.

Jak wykazał Tarski zachodzi twierdzenie następujące:

6.2. Lemmat: *jeśli* $\alpha \epsilon T$ *i* i *jest liczbą naturalną, to* $\alpha^i \epsilon T.$

Dowód uzyskuje się przez indukcję względem rzędu konsekwencji zbioru L.

Korzystając z pojęcia podniesienia typu wysłowić możemy następujący lemmat:

6.3. Lemmat: $[(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}] \rightarrow [(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}]^1 \epsilon T.$

Lemmat ten orzeka, że pierwsze podniesienie typu pewnika nieskończoności jest konsekwencją tego pewnika, inaczej mówiąc, że z pewnika nieskończoności wynika istnienie nieskończenie wielu zbiorów pierwszego typu. Byłoby zbędne podawać tutaj sformalizowany dowód tej tezy; zob. Russell i Whitehead [1], * 125.24.

§. 2. Metoda relatywizacji kwantyfikatorów

Celem twierdzeń, podanych w niniejszym paragrafie, jest naszkicowanie metody, którą zastosujemy w § 3 dla zbadania stosunków wynikania między pewnymi definicjami skończoności. Metoda ta — nazywamy ją w dalszym ciągu metodą relatywizacji kwantyfikatorów — znana jest zresztą oddawna; przez jej zastosowanie uzyskane były wyniki, wspomniane w pracy Tarski [6] ods. [20]) oraz w pracy Lindenbaum-Tarski [1], str. 22; również Herbrand ([1], rozdz. 3, § 3) stosował tę samą metodę do pewnych badań, dotyczących t. zw. problemu rozstrzygalności. Wszystkie te prace traktują relatywizację kwantyfikatorów bądź bardzo pobieżnie, bądź też zaznaczają tylko wyniki, które dają się uzyskać przez jej zastosowanie; ponieważ zarówno dla naszych dalszych rozważań, jak i dla szeregu innych badań z dziedziny metamatematyki, operowanie szeroko rozbudowanym aparatem tej metody jest niezbędne, podamy poniżej opis metody relatywizacji kwantyfikatorów w sposób dość wyczerpujący.

1. Musimy na początek wprowadzić szereg pomocniczych operacji nad wyrażeniami, które są niezbędne do precyzyjnego opisu wspomnianej metody.

1.1 Niech n oznacza dowolną liczbę naturalną; wprowadzimy funkcję p_n, która każdej funkcji zdaniowej α przyporządkowuje nową funkcję $p_n(\alpha)$: $p_n(\alpha)$ powstaje mianowicie z α przez zastąpienie każdej zmiennej $X_l^k \in Vr(\alpha)$ zmienną X_{l+n}^k $(k, l=1,2,...)$.

Funkcja p_n, z której dokładniejszego opisu możemy tu zrezygnować, posiada własności następujące:

1.2. Lemmat: *jeśli n jest liczbą naturalną, N — skończonym zbiorem zmiennych, $\alpha, \beta \in S$, to* a) *dla dostatecznie wielkich n $Vr(p_n(\alpha)) \cdot N = 0$;* b) $p_n(\alpha \rightarrow \beta) = p_n(\alpha) \rightarrow p_n(\beta)$ *i* $p_n(\overline{\alpha}) = \overline{p_n(\alpha)}$; c) $p_n((X_l^k)\alpha) = (X_{l+n}^k) p_n(\alpha)$; d) *jeśli α jest podstawieniem β, to $p_n(\alpha)$ jest podstawieniem $p_n(\beta)$;* e) *$X_l^k \in Vr(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X_{l+n}^k \in Vr(p_n(\alpha))$.*

Dowód tego lemmatu uzyskujemy drogą łatwych rozumowań indukcyjnych, które możemy tu pominąć.

2. Dogodnie nam będzie operować definicją następującą:

2.1. a) t jest to klasa ciągów $\theta=[\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n, ...]$, których n-ty wyraz jest dla $n=1,2,...$ funkcją zdaniową o jednej zmiennej wolnej X_1^n.

b) $\theta(X_p^n) \overset{Df}{=} Sb_{p|1}^n(\theta_n)$ dla $p, n = 1, 2 ...$ i $\theta=[\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n, ...] \in t$.

Ciągi klasy $\mathfrak{t}$ oznaczać będziemy z reguły symbolem θ ewentualnie z różnymi wskaźnikami; w myśl przyjętego sposobu znakowania θ_n oznaczać będzie n-ty wyraz ciągu θ. W związku z definicją b) zauważymy, że wprowadzony w niej symbol »$\theta(X_p^n)$« odbiega znowuż od przyjętego w matematyce sposobu znakowania: $\theta(X_p^n)$ jest w gruncie rzeczy funkcją dwu zmiennych naturalnych n, p i zmiennej, przebiegającej klasę $\mathfrak{t}$, powinniśmy więc właściwie używać symbolu postaci $\Phi_{n,p}(\theta)$ (por. tu § 1, 2.3). Definicji b) używać będziemy praktycznie tylko w tych przypadkach, w których $X_p^n \bar{\epsilon} Vr(\theta_n)$ lub $p=1$; w pierwszym przypadku operacja podstawiania $Sb_{p|1}^n(\theta_n)$ sprowadza się do wstawienia zmiennej X_p^n zamiast X_1^n na te miejsca w θ_n, w których X_1^n jest zmienną wolną w θ_n, w drugim zaś mamy po prostu $\theta(X_p^n)=\theta_n$.

2.2. Niech θ oznacza ciąg klasy $\mathfrak{t}$. Przyjmijmy $o_\theta^*(\alpha) \overset{Df}{=} \alpha$ dla każdej funkcji zdaniowej α rzędu 1. Załóżmy, że przy pewnym $k \geqslant 1$ określiliśmy już znaczenie symbolu $o_\theta^*(\alpha)$ dla wszystkich funkcyj zdaniowych α rzędu $\leqslant k$ i niech α będzie funkcją zdaniową rzędu $k+1$; zgodnie z definicją § 1, 3 zachodzi jedna z równości

(1) $\alpha=\beta\rightarrow\gamma$, (2) $\alpha=\bar{\beta}$, (3) $\alpha=(X_m^l)\beta$,

przy czym β, γ są to pewne funkcje zdaniowe rzędu $\leqslant k$, zaś l, m — pewne liczby naturalne. W przypadku (1) przyjmiemy $o_\theta^*(\alpha) \overset{Df}{=} o_\theta^*(\beta)\rightarrow o_\theta^*(\gamma)$, w przypadku (2) $o_\theta^*(\alpha) \overset{Df}{=} \overline{o_\theta^*(\beta)}$, w przypadku zaś (3) przyjmiemy

$$o_\theta^*(\alpha) \overset{Df}{=} (X_m^l)[\theta(X_m^l)\rightarrow o_\theta^*(\beta)] \quad \text{jeśli } X_m^l \bar{\epsilon} Vr(\theta(X_1^l));$$
$$o_\theta^*(\alpha) \overset{Df}{=} \alpha \quad \text{jeśli } X_m^l \epsilon Vr(\theta(X_1^l)).$$

W ten sposób każdej funkcji zdaniowej α przyporządkowane jest wyrażenie $o_\theta^*(\alpha)$.

2.3. Niech $\alpha \epsilon S$ i przy tym niech $X_{l_1}^{k_1}, \ldots, X_{l_m}^{k_m}$ oznaczają wszystkie zmienne wolne funkcji α; załóżmy nadto, że $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_m$ i że dla $k_i=k_{i+1}$ zachodzi $l_i<l_{i+1}$ $(i=1,2,\ldots,m-1)$. Jeśli dla jednego choć i $(i=1,2,\ldots m)$ $X_{l_i}^{k_i} \epsilon Vr(\theta(X_1^{k_i}))$, to przyjmiemy $o_\theta(\alpha) \overset{Df}{=} \alpha$, w przeciwnym zaś razie

$$o_\theta(\alpha) \overset{Df}{=} \theta(X_{l_1}^{k_1}) \& \ldots \& \theta(X_{l_m}^{k_m}) \rightarrow o_\theta^*(\alpha).$$

O funkcji $o_\theta(\alpha)$ mówimy, że powstała ona z α przez **zrelatywizowanie kwantyfikatorów do ciągu** θ.

2.4. Dla objaśnienia tej operacji załóżmy, że α jest zdaniem, tj. $Fr(\alpha)=0$. Funkcja $p_n(\alpha)$ jest wówczas też zdaniem i przy tym

wyraża ono tę samą myśl, co zdanie α: różnica między tymi zdaniami polega tylko na użyciu odmiennych zmiennych. Struktura natomiast zdania $o_\theta(p_n(\alpha))$ jest inna: jeśli obierzemy n dostatecznie duże, to wszędzie gdzie w zdaniu $p_n(\alpha)$ występowało wyrażenie $(X_l^k)\beta$ — tam w zdaniu $o_\theta(p_n(\alpha))$ występuje wyrażenie postaci $(X_l^k)[\theta(X_l^k)\rightarrow o_\theta^*(\beta)]$; moglibyśmy więc powiedzieć, że wszystko to, co w zdaniu $p_n(\alpha)$ (a więc i w α) wypowiedziane jest o każdym indywiduum typu k $(k=1,2,...)$ — jest w zdaniu $o_\theta(p_n(\alpha))$ wypowiedziane o każdym indywiduum k-tego typu, spełniającym warunek $\theta(X_1^k)$. Zdanie $o_\theta(p_n(\alpha))$ wyraża więc tę samą myśl co α, ale w stosunku do innego »świata« —takiego mianowicie, w którym pojęcie »zbiór (wzgl. indywiduum) k-tego typu« zastąpione zostało węższem na ogół pojęciem »indywiduum k-tego typu, spełniające warunek $\theta(X_1^k)$«. Widać stąd wyraźnie, że zachodzi związek między metodą relatywizacji kwantyfikatorów, a t. zw. dowodami przez interpretację, które stosuje się na każdym kroku w badaniach układów aksjomatów (por. Fraenkel [2], str. 340—343). O ile jednak przy dowodach przez interpretację ograniczać się musimy do badania układów aksjomatów, opierających się na jakimś systemie logiki, który przy interpretowaniu nie ulega zupełnie zmianie, to metodę relatywizacji kwantyfikatorów stosować też możemy do samego systemu logiki. Dzięki temu metoda relatywizacji kwantyfikatorów stosowana być może np. do zagadnień wzajemnej niezależności stałych logicznych, lub reguł wnioskowania, lub wreszcie aksjomatów lohicznych, do których to zagadnień zwykła metoda interpretacji nie daje się zastosować.

2.5. Dla ułatwienia sobie dalszej pracy przyjmiemy jeszcze jedną definicję pomocniczą:

2.51. $\alpha\epsilon S_\theta$ jeśli $\alpha\epsilon S, \theta\epsilon t$ i przy tym $Vr(\alpha)\cdot\sum_{i=1}^{q} Vr(\theta(X_1^i))=0$,

gdzie q oznacza największą liczbę taką, że co najmniej jedna ze zmiennych typu q należy do $Vr(\alpha)$.

Udowodnimy następnie szereg lemmatów.

2.52. Lemmat: *jeśli* $\theta\epsilon t, \alpha\epsilon S$, *to dla dostatecznie wielkich* n $p_n(\alpha)\epsilon S_\theta$.

Dla dowodu powołujemy się na lemmat 1.2 a) i definicję 2.51.

2.53. Lemmat: *jeśli* $\theta\epsilon t, \alpha\epsilon S$, *to* $Fr(o_\theta(\alpha))=Fr(o_\theta^*(\alpha))=Fr(\alpha)$.

Dowód otrzymujemy przez łatwą indukcję z definicji 2.2 i 2.3.

2.54. Lemmat: *jeśli* $\theta \epsilon t$, $\alpha, \beta \epsilon S_\theta$ *i* $\beta = Sb^{k_1 \ldots k_p}_{l_1|m_1 \ldots l_p|m_p}(\alpha)$, *to* $o^*_\theta(\beta) = Sb^{k_1 \ldots k_p}_{l_1|m_1 \ldots l_p|m_p}(o^*_\theta(\alpha))$ *i* $o_\theta(\beta) \epsilon Fl(\{o_\theta(\alpha)\})$.

Naszkicujemy tu tylko pobieżnie myśl przewodnią dowodu. Jeśli α jest funkcją rzędu 1, to $\alpha = X^k_l \varepsilon X^{k+1}_m$ przy pewnych k, l, m, przy czym wobec $\alpha \epsilon S_\theta$ $X^k_l, X^{k+1}_m \bar{\epsilon} Vr(\theta(X^k_1)) + Vr(\theta(X^{k+1}_1))$. W myśl więc 2.2 i 2.3

(1) $$o^*_\theta(\alpha) = X^k_l \varepsilon X^{k+1}_m, \quad o_\theta(\alpha) = \theta(X^k_l) \& \theta(X^{k+1}_m) \rightarrow X^k_l \varepsilon X^{k+1}_m.$$

Z założenia, że β jest podstawieniem α wynika, że przy pewnych p, q $\beta = X^k_p \varepsilon X^{k+1}_q$, przy czym z $\beta \epsilon S_\theta$ wynika, że $X^k_p, X^{k+1}_q \bar{\epsilon} Vr(\theta(X^k_1)) + Vr(\theta(X^{k+1}_1))$. Zachodzi więc w myśl 2.2 i 2.3

$$o^*_\theta(\beta) = X^k_p \varepsilon X^{k+1}_q, \quad o_\theta(\beta) = \theta(X^k_p) \& \theta(X^{k+1}_q) \rightarrow X^k_p \varepsilon X^{k+1}_q,$$

skąd wobec (1) wynika odrazu słuszność lemmatu dla funkcji rzędu 1.

Załóżmy, że $k \geqslant 1$ i że wykazaliśmy słuszność lemmatu dla funkcyj α rzędu $\leqslant k$. Niech $\alpha \epsilon S_\theta$ będzie funkcją rzędu $k+1$ i $\beta \epsilon S_\theta$ niech będzie podstawieniem α. W myśl definicji § 1, 3 mamy

(2) $\alpha = \bar{\gamma}$, lub (3) $\alpha = \gamma \rightarrow \delta$, lub (4) $\alpha = (X^p_q)\gamma$,

gdzie γ, δ są to funkcje rzędu $\leqslant k$, które należą oczywiście do S_θ, zaś p, q są to pewne liczby naturalne. Podstawienie, które α przeprowadza w β przeprowadza γ w γ^1, δ w δ^1 przy czym każda zmienna, występująca w γ^1, jak również każda zmienna, występująca w δ^1 występuje w α lub w β; wynika stąd, że $\gamma^1, \delta^1 \epsilon S_\theta$. Funkcje γ^1, δ^1 są więc podstawieniami funkcyj γ, δ rzędu $\leqslant k$, należących do S_θ i same należą do S_θ, co na mocy założenia indukcyjnego dowodzi, że podstawienie, które α przeprowadza w β przeprowadza $o^*_\theta(\gamma)$ w $o^*_\theta(\gamma^1)$ i $o^*_\theta(\delta)$ w $o^*_\theta(\delta^1)$. Musimy teraz rozpatrzyć po kolei przypadki (2), (3), (4). Jeśli zachodzi przypadek (2), to $\beta = \overline{\gamma^1}$ i

$$o^*_\theta(\alpha) = \overline{o^*_\theta(\gamma)}, \quad o^*_\theta(\beta) = \overline{o^*_\theta(\gamma^1)},$$

skąd od razu wnioskujemy, że podstawienie, które α przeprowadza w β przeprowadza też $o^*_\theta(\alpha)$ w $o^*_\theta(\beta)$. Oznaczając przez $X^{k_1}_{l_1}, \ldots, X^{k_m}_{l_m}$

zmienne wolne funkcji α (przy czym $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_m$ i $l_i < l_{i+1}$ jeśli $k_i = k_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, m-1$) mamy wobec założenia $\alpha \epsilon S_\theta$ i 2.3:

$$o_\theta(\alpha) = \theta(X_{l_1}^{k_1}) \& \ldots \& \theta(X_{l_m}^{k_m}) \rightarrow o_\theta^*(\alpha).$$

Podstawienie, które α przeprowadza w β przeprowadza więc $o_\theta(\alpha)$ w wyrażenie postaci

$$\theta(X_{n_1}^{k_1}) \& \ldots \& \theta(X_{n_m}^{k_m}) \rightarrow o_\theta^*(\beta),$$

które zatem należy do $Fl(\{o_\theta(\alpha)\})$. Zmienne $X_{n_1}^{k_1}, \ldots, X_{n_m}^{k_m}$ są to przy tym wszystkie zmienne wolne funkcji β, w myśl więc 2.3 i założenia $\beta \epsilon S_\theta$ zachodzi

$$o_\theta(\beta) \longleftrightarrow \{\theta(X_{n_1}^{k_1}) \& \ldots \& \theta(X_{n_m}^{k_m}) \rightarrow o_\theta^*(\beta)\} \epsilon T,$$

skąd wnosimy, że $o_\theta(\beta) \epsilon Fl(\{o_\theta(\alpha)\})$.

Rozumowania w przypadkach (3) i (4) są zupełnie analogiczne do tych, jakie przeprowadziliśmy dla przypadku (2) i dlatego nie będziemy ich tu przytaczali.

2.55. L e m m a t: *jeśli* $\theta \epsilon \mathfrak{t}$, $\alpha, \beta \epsilon S_\theta$, *to*
$o_\theta(\beta) \epsilon Fl(\{o_\theta(\alpha \rightarrow \beta), o_\theta(\alpha), (EX_1^1)\theta(X_1^1), (EX_1^2)\theta(X_1^2), \ldots, (EX_1^n)\theta(X_1^n), \ldots\})$.

D o w ó d. Oznaczmy

(1) $$Fr(\beta) = \{X_{q_1}^{p_1}, \ldots, X_{q_m}^{p_m}\},$$

(2) $$Fr(\beta) \cdot Fr(\alpha) = \{X_{k_1}^{h_1}, \ldots, X_{k_n}^{h_n}\},$$

(3) $$Fr(\alpha) - Fr(\beta) = \{X_{s_1}^{r_1}, \ldots, X_{s_l}^{r_l}\}.$$

Mamy wówczas

(4) $$\{X_{k_1}^{h_1}, \ldots, X_{k_n}^{h_n}\} \subset \{X_{q_1}^{p_1}, \ldots, X_{q_m}^{p_m}\}$$

oraz

(5) $$Fr(\alpha) = \{X_{k_1}^{h_1}, \ldots, X_{k_n}^{h_n}, X_{s_1}^{r_1}, \ldots, X_{s_l}^{r_l}\}.$$

Z założenia $\alpha, \beta \epsilon S_\theta$ wnosimy wobec 2.2, 2.3 i wzoru $Fr(\alpha \rightarrow \beta) = Fr(\alpha) + Fr(\beta)$, że

(6) $$o_\theta(\alpha) \longleftrightarrow [\theta(X_{k_1}^{h_1}) \& \ldots \& \theta(X_{k_n}^{h_n}) \& \theta(X_{s_1}^{r_1}) \& \ldots \& \theta(X_{s_l}^{r_l}) \rightarrow o_\theta^*(\alpha)] \epsilon T,$$

(7) $$o_\theta(\beta) \longleftrightarrow [\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \rightarrow o_\theta^*(\beta)] \epsilon T,$$

(8) $$o_\theta(\alpha \rightarrow \beta) \longleftrightarrow \{\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \& \theta(X_{k_1}^{h_1}) \& \ldots \& \theta(X_{k_n}^{h_n}) \& \theta(X_{s_1}^{r_1}) \& \ldots \& \theta(X_{s_l}^{r_l}) \rightarrow [o_\theta^*(\alpha) \rightarrow o_\theta^*(\beta)]\} \epsilon T.$$

Z (8) i (4) otrzymujemy

$$o_\theta(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow\{\theta(X_{q_1}^{p_1})\&\ldots\&\theta(X_{q_m}^{p_m})\ \&\ \theta(X_{s_1}^{r_1})\ \&\ \ldots\ \&\theta(X_{s_l}^{r_l})\ \&\ o_\theta^*(\alpha)\rightarrow$$
$$\rightarrow o_\theta^*(\beta)\}\epsilon T,$$

skąd wobec (6) i (4) wynika łatwo

$$o_\theta(\alpha)\&o_\theta(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow[\theta(X_{q_1}^{p_1})\&\ldots\&\theta(X_{q_m}^{p_m})\&\theta(X_{s_1}^{r_1})\&\ldots\&\theta(X_{s_l}^{r_l})\rightarrow$$
$$\rightarrow o_\theta^*(\beta)]\epsilon T.$$

Wzór ten daje

(9) $\theta(X_{q_1}^{p_1})\&\ldots\&\theta(X_{q_m}^{p_m})\&\theta(X_{s_1}^{r_1})\&\ldots\&\theta(X_{s_l}^{r_l})\rightarrow o_\theta^*(\beta)\ \epsilon Fl(\{o_\theta(\alpha), o_\theta(\alpha\rightarrow\beta)\})$.

Zmienne $X_{s_1}^{r_1},\ldots,X_{s_l}^{r_l}$ nie są na mocy (3) i lemmatu 2.53 wolne w $o_\theta^*(\beta)$; z (9) wynika tedy

$$[(EX_{s_1}^{r_1})\theta(X_{s_1}^{r_1})]\&\ldots\&[(EX_{s_l}^{r_l})\theta(X_{s_l}^{r_l})]\&\theta(X_{q_1}^{p_1})\&\ldots\&\theta(X_{q_m}^{p_m})\rightarrow$$
$$\rightarrow o_\theta^*(\beta)\epsilon Fl(\{o_\theta(\alpha), o_\theta(\alpha\rightarrow\beta)\}),$$

skąd już od razu wynika lemmat 2.55.

2.56. Lemmat: *jeśli* $\theta\epsilon$t, $\alpha\rightarrow(X_q^p)\beta\epsilon S_\theta$, $X_q^p\bar{\epsilon}Fr(\alpha)$, *to* $o_\theta(\alpha\rightarrow(X_q^p)\beta)\ \epsilon Fl(\{o_\theta(\alpha\rightarrow\beta)\})$.

Dowód. Z $\alpha\rightarrow(X_q^p)\beta\epsilon S_\theta$ wynika oczywiście $\alpha\rightarrow\beta\epsilon S_\theta$; jeśli więc

(1) $$Fr(\alpha\rightarrow\beta)=\{X_{q_1}^{p_1}, X_{q_2}^{p_2},\ldots, X_{q_m}^{p_m}\},$$

to

$$o_\theta(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow\{\theta(X_{q_1}^{p_1})\&\ldots\&\theta(X_{q_m}^{p_m})\rightarrow[o_\theta^*(\alpha)\rightarrow o_\theta^*(\beta)]\}\epsilon T,$$

t. zn.

(2) $$o_\theta(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow[\theta(X_{q_1}^{p_1})\&\ldots\&\theta(X_{q_m}^{p_m})\&o_\theta^*(\alpha)\rightarrow o_\theta^*(\beta)]\epsilon T.$$

Rozróżnić teraz musimy dwa przypadki

(3) $X_q^p\epsilon Fr(\beta)$, (4) $X_q^p\bar{\epsilon}Fr(\beta)$.

Jeśli zachodzi przypadek (3), to — jak widać z (1) —

(4) $$Fr(\alpha\rightarrow(X_q^p)\beta)=\{X_{q_1}^{p_1},\ldots,X_{q_m}^{p_m}\}-\{X_q^p\};$$

jeśli więc $X_{l_1}^{k_1},\ldots,X_{l_n}^{k_n}$ oznaczają wszystkie te spośród zmiennych $X_{q_1}^{p_1},\ldots,X_{q_m}^{p_m}$, które są różne od X_q^p, to — jak widać z 2.2 i 2.3 —

(5) $$o_\theta(\alpha\rightarrow(X_q^p)\beta)\leftrightarrow(\theta(X_{l_1}^{k_1})\&\ldots\&\theta(X_{l_n}^{k_n})\rightarrow$$
$$\rightarrow\{o_\theta^*(\alpha)\rightarrow(X_q^p)[\theta(X_q^p)\rightarrow o_\theta^*(\beta)]\})\epsilon T.$$

Wzór (2) daje

$$\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \& o_\theta^*(\alpha) \to o_\theta^*(\beta) \in Fl(\{o_\theta(\alpha \to \beta)\}),$$

skąd wynika

$$(6)\quad \theta(X_{l_1}^{k_1}) \& \ldots \& \theta(X_{l_n}^{k_n}) \& o_\theta^*(\alpha) \to [\theta(X_q^p) \to o_\theta^*(\beta)] \in Fl(\{o_\theta(\alpha \to \beta)\}).$$

Zmienna X_q^p — jako różna od $X_{l_1}^{k_1}, \ldots, X_{l_n}^{k_n}$ — nie jest wolna w wyrażeniu $\theta(X_{l_1}^{k_1}) \& \ldots \& \theta(X_{l_n}^{k_n})$; na mocy założeń i lemmatu 2.53 $X_q^p \bar{\in} Fr(o_\theta^*(\alpha))$ tak, że do tezy (6) zastosować możemy regułę dołączania kwantyfikatora, otrzymując

$$\theta(X_{l_1}^{k_1}) \& \ldots \& \theta(X_{l_n}^{k_n}) \& o_\theta^*(\alpha) \to (X_q^p)[\theta(X_q^p) \to o_\theta^*(\beta)] \in Fl(\{o_\theta(\alpha \to \beta)\}),$$

albo w równoważnej postaci

$$\theta(X_{l_1}^{k_1}) \& \ldots \& \theta(X_{l_n}^{k_n}) \to \{o_\theta^*(\alpha) \to (X_q^p)[\theta(X_q^p) \to o_\theta^*(\beta)]\} \in Fl(\{o_\theta(\alpha \to \beta)\}).$$

W myśl (5) wnosimy stąd, że — w rozważanym obecnie przypadku — lemmat 2.56 jest słuszny.

Załóżmy z kolei, że zachodzi przypadek (4); w tym wypadku mamy oczywiście $Fr(\alpha \to (X_q^p)\beta) = Fr(\alpha \to \beta) = \{X_{q_1}^{p_1}, \ldots, X_{q_m}^{p_m}\}$ i w myśl 2.2 i 2.3 zachodzi

$$(7)\quad \begin{aligned} & o_\theta(\alpha \to (X_q^p)\beta) \leftrightarrow (\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \to \{o_\theta^*(\alpha) \to \\ & \qquad \to (X_q^p)[\theta(X_q^p) \to o_\theta^*(\beta)]\}) \in T. \end{aligned}$$

Z wzoru (2) wynika

$$\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \& o_\theta^*(\alpha) \to o_\theta^*(\beta) \in Fl(\{o_\theta(\alpha \to \beta)\})$$

i tym bardziej

$$\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \& o_\theta^*(\alpha) \to [\theta(X_q^p) \to o_\theta^*(\beta)] \in Fl(\{o_\theta(\alpha \to \beta)\}).$$

Zmienna X_q^p, jako różna od wszystkich zmiennych $X_{q_1}^{p_1}, \ldots, X_{q_m}^{p_m}$ nie jest, na mocy założeń i lemmatu 2.53 wolna w poprzedniku powyższej implikacji; otrzymujemy więc, dołączając kwantyfikator

$$\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \& o_\theta^*(\alpha) \to (X_q^p)[\theta(X_q^p) \to o_\theta^*(\beta)] \in Fl(\{o_\theta(\alpha \to \beta)\}),$$

albo

$$\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \to \{o_\theta^*(\alpha) \to (X_q^p)[\theta(X_q^p) \to o_\theta^*(\beta)]\} \in Fl(\{o_\theta(\alpha \to \beta)\}),$$

co na mocy (7) dowodzi lemmatu i dla przypadku (4).

2.57. Lemmat: *jeśli* $\theta \epsilon \mathfrak{t}$, $\alpha \rightarrow (X_q^p)\beta \epsilon S_\theta$, *to*

$$o_\theta(\alpha \rightarrow \beta) \epsilon Fl(\{o_\theta(\alpha \rightarrow (X_q^p)\beta), (EX_1^p)\theta(X_1^p)\}).$$

Dowód: Niech

$$Fr(\alpha \rightarrow (X_q^p)\beta) = \{X_{q_1}^{p_1}, \ldots, X_{q_m}^{p_m}\};$$

zgodnie z założeniem i definicjami 2.2 i 2.3

$$o_\theta(\alpha \rightarrow (X_q^p)\beta) \leftrightarrow (\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \rightarrow \{o_\theta^*(\alpha) \rightarrow$$
$$\rightarrow (X_q^p)[\theta(X_q^p) \rightarrow o_\theta^*(\beta)]\} \epsilon T,$$

skąd łatwo wynika

(1) $\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \& \theta(X_q^p) \rightarrow [o_\theta^*(\alpha) \rightarrow o_\theta^*(\beta)] \epsilon Fl(\{o_\theta(\alpha \rightarrow (X_q^p)\beta)\})$.

Rozróżnimy dwa przypadki:

(2) $X_q^p \epsilon Fr(\alpha \rightarrow \beta)$, (3) $X_q^p \bar{\epsilon} Fr(\alpha \rightarrow \beta)$.

W przypadku (2) $X_q^p, X_{q_1}^{p_1}, \ldots, X_{q_m}^{p_m}$ są to wszystkie zmienne wolne funkcji $\alpha \rightarrow \beta$; ponieważ nadto $\alpha \rightarrow \beta \epsilon S_\theta$, zatem

$$o_\theta(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \{\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \& \theta(X_q^p) \rightarrow [o_\theta^*(\alpha) \rightarrow o_\theta^*(\beta)] \epsilon T,$$

co wobec (1) dowodzi, że — dla tego przypadku — lemmat 2.57 jest słuszny. Jeśli zaś zachodzi przypadek (3), to $Fr(\alpha \rightarrow \beta) = \{X_{q_1}^{p_1}, \ldots, X_{q_m}^{p_m}\}$ i

(4) $o_\theta(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \{\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \rightarrow [o_\theta^*(\alpha) \rightarrow o_\theta^*(\beta)]\} \epsilon T$.

Z (3) i lemmatu 2.53 wynika, że $X_q^p \bar{\epsilon} Fr(o_\theta^*(\alpha) \rightarrow o_\theta^*(\beta))$; wzór (1) daje tedy

$$\theta(X_{q_1}^{p_1}) \& \ldots \& \theta(X_{q_m}^{p_m}) \& [(EX_q^p)\theta(X_q^p)] \rightarrow$$
$$\rightarrow [o_\theta^*(\alpha) \rightarrow o_\theta^*(\beta)] \epsilon Fl(\{o_\theta(\alpha \rightarrow (X_q^p)\beta)\}),$$

albo — wobec (4) —

$$[(EX_q^p)\theta(X_q^p)] \rightarrow o_\theta(\alpha \rightarrow \beta) \epsilon Fl(\{o_\theta(\alpha \rightarrow (X_q^p)\beta)\}),$$

skąd wynika lemmat 2.57 i dla przypadku (3).

3. Sposób, w jaki metodę relatywizacji kwantyfikatorów zastosujemy do dowodów niezależności, opisuje lemmat następujący:

3.1. Lemmat: *jeśli* $\delta \epsilon S$, M *jest zbiorem niesprzecznym zdań* $\theta \epsilon \mathfrak{t}$ *i jeśli przy tym spełnione są warunki*

(1) *dla każdego* $\alpha \epsilon Fl(M)$ *istnieje* m *takie, że dla* $n \geqslant m$ $o_\theta(p_n(\alpha)) \epsilon Fl(M)$,

(2) *istnieje* m *takie, że dla* $n \geqslant m$ $\overline{o_\theta(p_n(\delta))} \epsilon Fl(M)$,

to $\delta \bar{\epsilon} Fl(M)$.

Dowód. Gdyby $\delta \epsilon Fl(M)$, to zgodnie z (1) zachodziłby wzór

$$o_\theta(p_n(\delta)) \epsilon Fl(M)$$

dla dostatecznie wielkich n. Z (2) możemy więc wywnioskować, że dla pewnego n zachodzą jednocześnie wzory $o_\theta(p_n(\delta)) \epsilon Fl(M)$ i $\overline{o_\theta(p_n(\delta))} \epsilon Fl(M)$, co przeczy założeniu niesprzeczności zbioru M.

W przypadkach, które rozważymy w § 3 sprawdzenie, że zachodzi wzór (2) z powyższego lemmatu nie będzie nastręczało trudności; bezpośrednie natomiast sprawdzenie wzoru (1) nie jest możliwe i dlatego podamy tu szereg warunków, przy których spełnieniu zachodzenie wzoru (1) jest zapewnione.

3.2. Lemmat: *jeśli* $M \subset S, \theta \epsilon$ t, $(EX_1^p)\theta(X_1^p) \epsilon Fl(M)$ *dla* $p=1,2,\ldots$ *i jeśli spełniony jest warunek*

dla $\alpha \epsilon M+L$ *istnieje* m *takie, że dla* $n \geqslant m$ $o_\theta(p_n(\alpha)) \epsilon Fl(M)$,

to dla każdego $\beta \epsilon Fl(M)$ *istnieje* m *takie, że dla* $n \geqslant m$ $o_\theta(p_n(\beta)) \epsilon Fl(M)$.

Dowód. Jeśli β jest konsekwencją rzędu 1 zbioru M, to twierdzenie jest spełnione na mocy założenia lemmatu i definicji § 1, 4.6.

Robimy następnie założenie indukcyjne, w którym k oznacza dowolną liczbę $\geqslant 1$:

(1) *jeśli* β *jest konsekwencją rzędu* $\leqslant k$ *zbioru* M, *to istnieje* m *takie, że dla* $n \geqslant m$ $o_\theta(p_n(\beta)) \epsilon Fl(M)$.

Niech β będzie konsekwencją rzędu $k+1$ zbioru M. Zgodnie z definicją rzędu zajść musi jeden z przypadków następujących:

(2) *istnieje konsekwencja* α *rzędu* $\leqslant k$ *zbioru* M *taka, że* β *jest podstawieniem* α;

(3) *istnieją konsekwencje* γ, δ *rzędu* $\leqslant k$ *zbioru* M *takie, że* $\delta = \gamma \rightarrow \beta$;

(4) *istnieją funkcje zdaniowe* γ, δ *i zmienna* $X_q^p \bar{\epsilon} Fr(\gamma)$ *takie że* $\gamma \rightarrow \delta$ *jest konsekwencją rzędu* $\leqslant k$ *zbioru* M *i* $\beta = \gamma \rightarrow (X_q^p)\delta$;

(5) *istnieją funkcje zdaniowe* γ, δ *i zmienna* X_q^p *takie, że* $\gamma \rightarrow (X_q^p)\delta$ *jest konsekwencją rzędu* $\leqslant k$ *zbioru* M *i* $\beta = \gamma \rightarrow \delta$.

Załóżmy, że zachodzi przypadek (2) i niech m oznacza liczbę tak wielką, by dla $n \geqslant m$ $p_n(\alpha)$, $p_n(\beta) \in S_\theta$ i $o_\theta(p_n(\alpha)) \in Fl(M)$; liczba taka istnieje na mocy (1) i lemmatu 2.52. W myśl lemmatów 2.54 i 1.2 d) dla $n \geqslant m$ $o_\theta(p_n(\beta)) \in Fl(\{o_\theta(p_n(\alpha))\})$, a więc tym bardziej $o_\theta(p_n(\beta)) \in Fl(M)$.

Jeśli zachodzi przypadek (3), to oznaczmy przez m liczbę tak wielką, że dla $n \geqslant m$ $p_n(\gamma)$, $p_n(\delta)$, $p_n(\beta) \in S_\theta$ i $o_\theta(p_n(\gamma))$, $o_\theta(p_n(\delta)) \in Fl(M)$; liczba taka istnieje na mocy (1) i lemmatu 2.52. W myśl lemmatu 1.2 b) mamy dla $n \geqslant m$ $p_n(\delta) = p_n(\gamma) \to p_n(\beta)$; stosując więc lemmat 2.55 wnosimy, że

$$o_\theta(p_n(\beta)) \in Fl(\{o_\theta(p_n(\delta)), o_\theta(p_n(\gamma)), (EX_1^1)\theta(X_1^1), \ldots, (EX_1^p)\theta(X_1^p), \ldots\}).$$

Wobec założeń twierdzenia wyprowadzamy stąd natychmiast

$$o_\theta(p_n(\beta)) \in Fl(M) \text{ dla } n \geqslant m.$$

Jeśli zachodzi przypadek (4), to oznaczamy przez m liczbą taką, by z $n \geqslant m$ wynikało

$$p_n(\gamma \to (X_q^p)\delta) \in S_\theta \text{ i } o_\theta(p_n(\gamma \to \delta)) \in Fl(M).$$

Istnienie takiej liczby wynika znów z (1) i lemmatu 2.52. Stosując lemmat 2.56 wyprowadzamy z łatwością, że

$$o_\theta(p_n(\gamma \to (X_q^p)\delta)) \in Fl(\{o_\theta(p_n(\gamma \to \delta))\}),$$

skąd wynika $o_\theta(p_n(\gamma \to (X_q^p)\delta)) \in Fl(M)$, albo $o_\theta(p_n(\beta)) \in Fl(M)$.

Jeśli wreszcie zachodzi przypadek (5), to oznaczamy znowu przez m liczbę tak dużą, by dla $n \geqslant m$ spełnione były warunki

$$p_n(\gamma \to (X_q^p)\delta) \in S_\theta \text{ i } o_\theta(p_n(\gamma \to (X_q^p)\delta)) \in Fl(M).$$

Istnienie tej liczby wynika z (1) i lemmatu 2.52. Na podstawie lemmatu 1.2 b), c)

$$p_n(\gamma \to (X_q^p)\delta) = p_n(\gamma) \to (X_{q+n}^p) p_n(\delta), \quad p_n(\beta) = p_n(\gamma) \to p_n(\delta).$$

Stosując lemmat 2.57 wnosimy, że

$$o_\theta(p_n(\gamma) \to p_n(\delta)) \in Fl(\{o_\theta(p_n(\gamma) \to (X_{q+n}^p) p_n(\delta)), (EX_1^p)\theta(X_1^p)\}),$$

co daje natychmiast, wobec założeń twierdzenia $o_\theta(p_n(\gamma \to \delta)) \in Fl(M)$, tj. $o_\theta(p_n(\beta)) \in Fl(M)$.

Z powyższej dyskusji wnosimy, że z słuszności wzoru (1) dla liczby $k \geqslant 1$ wynika jego słuszność dla liczby $k+1$, stosując ro-

zumowanie indukcyjne wyprowadzamy stąd słuszność wzoru (1) dla dowolnej liczby $k\geqslant 1$. Ponieważ zaś dla każdej funkcji $\beta\epsilon Fl(M)$ istnieje $k\geqslant 1$ takie, że β jest konsekwencją rzędu k zbioru M przeto z (1) wynika, że istotnie dla każdego $\beta\epsilon Fl(M)$ istnieje m takie, że dla $n\geqslant m$ $o_\theta(p_n(\beta))\epsilon Fl(M)$, c. b. d. o.

Z lemmatu 3.2 wynika, że dla sprawdzenia wzoru (1) z lemmatu 3.1 wystarcza (co prawda tylko w przypadku, gdy $(EX_1^p)\theta(X_1^p)\epsilon Fl(M)$ dla $p=1,2,...$) ograniczyć się do udowodnienia odnośnej własności dla funkcyj zbioru $M+L$; o funkcjach zbioru M nie możemy przy tym nic powiedzieć dopóki M nie zostanie bliżej określone, można natomiast podać pewne warunki, które nałożone na ciąg θ zapewniają zachodzenie omawianej własności dla funkcyj zbioru L.

3.3. Lemmat: *jeśli $\theta\epsilon\mathfrak{t}$ i istnieją funkcje $\alpha,\beta,\gamma\epsilon S$ takie, że $\delta=(\alpha\to\beta)\to[(\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma)]$, lub $\delta=(\bar{\alpha}\to\alpha)\to\alpha$, lub $\delta=\alpha\to(\bar{\alpha}\to\beta)$, to istnieje liczba m taka, że dla $n\geqslant m$ $o_\theta(p_n(\delta))\epsilon T$.*

Dowód. Rozważymy tylko przypadek $\delta=(\alpha\to\beta)\to[(\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma)]$, pozostałe bowiem rozpatrzyć się dają w sposób zupełnie analogiczny.

Z lemmatu 2.52 wnosimy, że dla dostatecznie wielkich n $p_n(\alpha), p_n(\beta), p_n(\gamma)\epsilon S_\theta$. Oznaczając tedy przez $X_{q_1}^{p_1},\dots,X_{q_k}^{p_k}$ wszystkie zmienne wolne funkcji $p_n(\delta)$ mamy na mocy 2.2 i 2.3

$$o_\theta(p_n(\delta))\leftrightarrow(\theta(X_{q_1}^{p_1})\,\&\dots\&\,\theta(X_{q_k}^{p_k})\to\{[o_\theta^*(p_n(\alpha))\to o_\theta^*(p_n(\beta))]\to$$
$$\to[(o_\theta^*(p_n(\beta))\to o_\theta^*(p_n(\gamma)))\to(o_\theta^*(p_n(\alpha))\to o_\theta^*(p_n(\gamma)))]\})\epsilon T,$$

skąd wnioskujemy odrazu, że $o_\theta(p_n(\delta))\epsilon T$.

3.4. Lemmat: *jeśli $M\subset S$, $\theta\epsilon\mathfrak{t}$ i $\theta(X_1^{p+1})\&X_1^p\varepsilon X_1^{p+1}\to\theta(X_1^p)\epsilon Fl(M)$ dla $p=1,2,3,...$, to dla każdej funkcji zdaniowej*

(1) $$\alpha=(X_l^k)(X_l^k\varepsilon X_m^{k+1}\leftrightarrow X_l^k\varepsilon X_n^{k+1})\to X_m^{k+1}IdX_n^{k+1}$$

istnieje liczba i taka, że dla $j\geqslant i$ $o_\theta(p_j(\alpha))\epsilon Fl(M)$.

Dowód. Niech i będzie liczbą tak wielką, by dla $j\geqslant i$ $p_j(\alpha)\epsilon S_\theta$ i niech j oznacza liczbę $\geqslant i$. Przyjmując dla krótkości $q=l+j$, $r=m+j$, $s=n+j$ otrzymujemy z (1), definicji 1.1 i def. § 1, 2.39

$$p_j(\alpha)=(X_q^k)(X_q^k\varepsilon X_r^{k+1}\leftrightarrow X_q^k\varepsilon X_s^{k+1})\to$$
$$\to(X_r^{k+2})(X_r^{k+1}\varepsilon X_r^{k+2}\to X_s^{k+1}\varepsilon X_r^{k+2});$$

z uwagi, że $p_j(\alpha)\epsilon S_\theta$ otrzymujemy z tego wzoru na mocy 2.2 i 2.3

$$o_\theta(p_j(\alpha))\leftrightarrow(\theta(X_r^{k+1})\&\theta(X_s^{k+1})\rightarrow\{(X_q^k)[\theta(X_q^k)\rightarrow(X_q^k\varepsilon X_r^{k+1}\leftrightarrow X_q^k\varepsilon X_s^{k+1})]\rightarrow$$
$$\rightarrow(X_r^{k+2})[\theta(X_r^{k+2})\rightarrow(X_r^{k+1}\varepsilon X_r^{k+2}\rightarrow X_s^{k+1}\varepsilon X_r^{k+2})]\})\epsilon T,$$

albo po łatwej przeróbce

(2) $$o_\theta(p_j(\alpha))\leftrightarrow\{\theta(X_r^{k+1})\&\theta(X_s^{k+1})\&(X_q^k)[\theta(X_q^k)\rightarrow(X_q^k\varepsilon X_r^{k+1}\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow X_q^k\varepsilon X_s^{k+1})]\rightarrow(X_r^{k+2})[\theta(X_r^{k+2})\&X_r^{k+1}\varepsilon X_r^{k+2}\rightarrow X_s^{k+1}\varepsilon X_r^{k+2}]\}\epsilon T.$$

Oznaczmy dla skrótu

(3) $$\lambda_n\overset{Df}{=}\theta(X_n^{k+1})\&X_q^k\varepsilon X_n^{k+1}\rightarrow\theta(X_q^k)\qquad(n=1,2,...),$$

(4) $$\mu_{m,n}\overset{Df}{=}(X_q^k)[\theta(X_q^k)\rightarrow(X_q^k\varepsilon X_m^{k+1}\leftrightarrow X_q^k\varepsilon X_n^{k+1})]\qquad(m,n=1,2,...).$$

Mamy wówczas

(5) $$\lambda_n\&\theta(X_n^{k+1})\&X_q^k\varepsilon X_n^{k+1}\rightarrow\theta(X_q^k)\&X_q^k\varepsilon X_n^{k+1}\epsilon T\qquad(n=1,2,...),$$

(6) $$\mu_{m,n}\&\theta(X_q^k)\&X_q^k\varepsilon X_m^{k+1}\rightarrow X_q^k\varepsilon X_n^{k+1}\epsilon T\qquad(m,n=1,2,...),$$

(7) $$\mu_{m,n}\&\theta(X_q^k)\&X_q^k\varepsilon X_n^{k+1}\rightarrow X_q^k\varepsilon X_m^{k+1}\epsilon T\qquad(m,n=1,2,...).$$

Z (5) i (6) wynika

$$\lambda_r\&\mu_{r,s}\&\theta(X_r^{k+1})\&X_q^k\varepsilon X_r^{k+1}\rightarrow X_q^k\varepsilon X_s^{k+1}\epsilon T,$$

zaś z (5) i (7) wynika

$$\lambda_s\&\mu_{r,s}\&\theta(X_s^{k+1})\&X_q^k\varepsilon X_s^{k+1}\rightarrow X_q^k\varepsilon X_r^{k+1}\epsilon T.$$

Łącząc dwa te wzory, otrzymujemy

(8) $$\lambda_r\&\lambda_s\&\mu_{r,s}\&\theta(X_r^{k+1})\&\theta(X_s^{k+1})\rightarrow(X_q^k\varepsilon X_r^{k+1}\leftrightarrow X_q^k\varepsilon X_s^{k+1})\epsilon T.$$

Z (3) i z założeń lemmatu wynika, że $\lambda_r,\lambda_s\epsilon Fl(M)$, wzór (8) daje więc

$$\mu_{r,s}\&\theta(X_r^{k+1})\&\theta(X_s^{k+1})\rightarrow(X_q^k\varepsilon X_r^{k+1}\leftrightarrow X_q^k\varepsilon X_s^{k+1})\epsilon Fl(M),$$

skąd po dołączeniu kwantyfikatora wynika

$$\mu_{r,s}\&\theta(X_r^{k+1})\&\theta(X_s^{k+1})\rightarrow(X_q^k)(X_q^k\varepsilon X_r^{k+1}\leftrightarrow X_q^k\varepsilon X_s^{k+1})\epsilon Fl(M).$$

W myśl § 1, 4.13 wynika stąd, że

$$\theta(X_r^{k+1})\&\theta(X_s^{k+1})\&\mu_{r,s}\rightarrow X_r^{k+1}IdX_s^{k+1}\epsilon Fl(M),$$

a więc tym bardziej (por. § 1, 2.39)

$$\theta(X_r^{k+1})\&\theta(X_s^{k+1})\&\mu_{r,s}\rightarrow(X_r^{k+2})(\theta(X_r^{k+2})\&X_r^{k+1}\varepsilon X_r^{k+2}\rightarrow$$
$$\rightarrow X_s^{k+1}\varepsilon X_r^{k+2})\epsilon Fl(M).$$

Wobec (4) i (2) wzór ten daje odrazu $o_\theta(p_j(\alpha))\epsilon Fl(M)$, c. b. d. o.

4. Jak widać z dwu poprzednich lemmatów dla skompletowania dyskusji funkcyj zdaniowych zbioru L rozpatrzeć jeszcze należy funkcje postaci § 1, 4.12, tj. t. zw. pseudodefinicje. Jest to najtrudniejszy punkt całego dowodu i znane nam warunki, które nałożone na ciąg θ zapewniają zachodzenie dla tych funkcyj zdaniowych warunku (1) z lemmatu 3.1 są nader specjalnej natury. Zamiast podawać te warunki zdefiniujemy pewien specjalny ciąg θ, którym posługiwać się będziemy w następnym § i wykażemy, że dla tego ciągu zachodzą żądane warunki; w 6.2 zaznaczymy w jaki sposób można rozumowania te uogólnić tak, aby stosowały się one nie tylko do tego specjalnego ciągu θ, ale pewnej (bardzo zresztą wąskiej) klasy ciągów z $\mathfrak{t}$.

4.1. Definicja. a) $K(X^i_j; X^2_m) \overset{Df}{=} S(X^2_m) \& (X^4_{j+1})[G(X^4_{j+1}) \& \& N^*(X^4_{j+1}; X^2_m) \rightarrow N_i(X^4_{j+1}; X^i_j)]$ dla dowolnych naturalnych i, j, m takich, by $X^2_m \neq X^i_j$;

b) $\theta_{*1} \overset{Df}{=} (EX^2_2)K(X^1_1; X^2_2)$;

$$\theta_{*i+1} \overset{Df}{=} (X^i_1)[X^i_1 \varepsilon X^{i+1}_1 \rightarrow \theta_{*i}] \& (EX^2_2)K(X^{i+1}_1; X^2_2).$$

c) $o^*(a) \overset{Df}{=} o^*_{\theta_*}(a), \quad o(a) \overset{Df}{=} o_{\theta_*}(a)$ dla $a \varepsilon S$.

Definicja 4.1 b) określa indukcyjnie ciąg θ_*, który — jak spostrzegamy od razu — należy do klasy $\mathfrak{t}$. Wykażemy, że ciąg ten posiada potrzebne nam własności i ustalimy w tym celu przede wszystkim kilka lemmatów pomocniczych:

4.2. Lemmat: *jeśli* $\theta = \theta_*$, *to* $(X^1_1)\theta(X^1_1) \varepsilon T$.

Dowód. W myśl definicji § 1, 5.64

$$X^1_1 \varepsilon X^2_2 \& N^*(X^4_2; X^2_2) \rightarrow N_1(X^4_2; X^1_1) \varepsilon T,$$

skąd wynika natychmiast

$$X^1_1 \varepsilon X^2_2 \rightarrow (X^4_2)[G(X^4_2) \& N^*(X^4_2; X^2_2) \rightarrow N_1(X^4_2; X^1_1)] \varepsilon T.$$

Z tezy tej i z lemmatu § 1, 5.533 b) wynika natychmiast

$$(EX^2_2)\{S(X^2_2) \& [G(X^4_2) \& N^*(X^4_2; X^2_2) \rightarrow N_1(X^4_2; X^1_1)]\} \varepsilon T,$$

tj. $\theta(X^1_1) \varepsilon T$; z wzoru tego wyprowadzamy $(X^1_1)\theta(X^1_1) \varepsilon T$, c. b. d. o.

4.3. Lemmat: *jeśli* $\theta = \theta_*$, *to* $(EX^i_1)\theta(X^i_1) \varepsilon T$ *dla* $i = 1, 2, \ldots$.

Dowód. Dla $i=1$ słuszność lemmatu wynika z 4.2. Przypuśćmy, że $i=j+1$, gdzie $j\geqslant 1$ i przyjmijmy dla skrótu

(1) $$\alpha(X_1^{j+1})\overset{Df}{=}(X_1^j)\,\overline{X_1^j\,\varepsilon\,X_1^{j+1}};$$

mamy oczywiście

(2) $$\alpha(X_1^{j+1})\rightarrow(X_1^j)[X_1^j\,\varepsilon\,X_1^{j+1}\rightarrow\theta(X_1^j)]\,\epsilon\,T,$$

oraz

$$\alpha(X_1^{j+1})\rightarrow(X_1^j\,\varepsilon\,X_1^{j+1}\leftrightarrow X_2^j\,\varepsilon\,X_1^{j+1})\,\epsilon\,T,$$

co jak łatwo spostrzec daje

(3) $$\alpha(X_1^{j+1})\,\&\,G(X_2^1)\rightarrow N_{j+1}(X_2^1;X_1^{j+1})\,\epsilon\,T$$

(por. § 1, 5.62, 5.63). Z (3) wynika

$$\alpha(X_1^{j+1})\rightarrow(X_2^1)[G(X_2^1)\,\&\,N^*(X_2^1;X_2^2)\rightarrow N_{j+1}(X_2^1;X_1^{j+1})]\,\epsilon\,T,$$

co daje w myśl def. 4.1 a)

$$\alpha(X_1^{j+1})\,\&\,S(X_2^2)\rightarrow K(X_1^{j+1};X_2^2)\,\epsilon\,T.$$

Opierając się na lemmacie § 1, 5.533 a) wnosimy stąd, że

$$\alpha(X_1^{j+1})\rightarrow(EX_2^2)K(X_1^{j+1};X_2^2)\,\epsilon\,T,$$

co łącznie z (2) i definicją 4.1 b) daje $\alpha(X_1^{j+1})\rightarrow\theta(X_1^{j+1})\,\epsilon\,T$. Ponieważ $(EX_1^{j+1})\alpha(X_1^{j+1})\,\epsilon\,T$ jak widać z (1) i § 1, 4.12, przeto wzór ostatni daje $(EX_1^{j+1})\theta(X_1^{j+1})\,\epsilon\,T$, c. b. d. o.

4.4. Lemmat: *jeśli* $\theta=\theta_*$, *to* $\theta(X_1^{p+1})\,\&\,X_1^p\,\varepsilon\,X_1^{p+1}\rightarrow\theta(X_1^p)\,\epsilon\,T$ *dla* $p=1,2,\ldots$.

Dowód wynika natychmiast z definicji 4.1 b).

4.5. Lemmat: *jeśli zmienne* $X_{j_1}^{i_1},\ldots,X_{j_n}^{i_n},X_{p_1}^2,\ldots,X_{p_n}^2,X_m^2$ *są wszystkie różne między sobą, to*

$$[(EX_{p_1}^2)K(X_{j_1}^{i_1};X_{p_1}^2)]\&[(X_{p_2}^2)K(X_{j_2}^{i_2};X_{p_2}^2)]\,\&\ldots\&[(EX_{p_n}^2)K(X_{j_n}^{i_n};X_{p_n}^2)]\rightarrow$$
$$\rightarrow(EX_m^2)[K(X_{j_1}^{i_1};X_m^2)\,\&\,K(X_{j_2}^{i_2};X_m^2)\,\&\ldots\&\,K(X_{j_n}^{i_n};X_m^2)]\,\epsilon\,T$$

dla $n=1,2,3,\ldots$.

Dowód. Na mocy lemmatu § 1, 5.662

$$G(X_{j_k+1}^1)\,\&\,N^*(X_{j_k+1}^1;X_m^2)\,\&\,X_{p_k}^2\subseteq X_m^2\rightarrow N^*(X_{j_k+1}^1;X_{p_k}^2)\,\epsilon\,T$$

dla $k=1,2,\ldots,n$; wnosimy stąd, że dla $k=1,2,\ldots,n$

$$(X^4_{j_k+1})[G(X^4_{j_k+1}) \,\&\, N^*(X^4_{j_k+1}; X^2_{p_k}) \rightarrow N_{i_k}(X^4_{j_k+1}; X^{i_k}_{j_k})] \rightarrow [G(X^4_{j_k+1}) \,\&$$
$$\&\, N^*(X^4_{j_k+1}; X^2_m) \,\&\, X^2_{p_k} \subseteq X^2_m \rightarrow N_{i_k}(X^4_{j_k+1}; X^{i_k}_{j_k})] \in T,$$

co zgodnie z definicją 4.1 a) daje po łatwym przekształceniu

$$K_{i_k}(X^{i_k}_{j_k}; X^2_{p_k}) \,\&\, X^2_{p_k} \subseteq X^2_m \rightarrow [G(X^4_{j_k+1}) \,\&$$
$$\&\, N^*(X^4_{j_k+1}; X^2_m) \rightarrow N_{i_k}(X^4_{j_k+1}; X^{i_k}_{j_k})] \in T \quad (k=1, 2, ..., n).$$

Dołączając kwantyfikator i stosując definicję 4.1 a) wyprowadzamy stąd od razu

$$S(X^2_m) \,\&\, K(X^{i_k}_{j_k}; X^2_{p_k}) \,\&\, X^2_{p_k} \subseteq X^2_m \rightarrow K(X^{i_k}_{j_k}; X^2_m) \in T \text{ dla } k=1, 2, ... n.$$

Łącząc te n tez znakiem »&« otrzymamy

(1)
$$K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_{p_1}) \,\&\ldots\&\, K(X^{i_n}_{j_n}; X^2_{p_n}) \,\&\, X^2_{p_1} \subseteq X^2_m \,\&\ldots\&\, X^2_{p_n} \subseteq X^2_m \,\&\, S(X^2_m) \rightarrow$$
$$\rightarrow K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_m) \,\&\, \ldots \,\&\, K(X^{i_n}_{j_n}; X^2_m) \in T.$$

Przyjmijmy dla skrótu

(2)
$$\alpha \overset{Df}{=} (X^1_1)[X^1_1 \varepsilon X^2_m \leftrightarrow (X^1_1 \varepsilon X^2_{p_1} \vee \ldots \vee X^1_1 \varepsilon X^2_{p_n})];$$

w myśl lemmatu § 1, 5.535

$$\alpha \,\&\, S(X^2_{p_1}) \,\&\, \ldots \,\&\, S(X^2_{p_n}) \rightarrow S(X^2_m) \in T,$$

co w myśl definicji 4.1 a) dowodzi, że tym bardziej

(3)
$$\alpha \,\&\, K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_{p_1}) \,\&\, \ldots \,\&\, K(X^{i_n}_{j_n}; X^2_{p_n}) \rightarrow S(X^2_m) \in T.$$

Zachodzi nadto oczywiście

(4)
$$\alpha \rightarrow X^2_{p_1} \subseteq X^2_m \,\&\, \ldots \,\&\, X^2_{p_n} \subseteq X^2_m \in T.$$

Uwzględniając (3) i (4) otrzymujemy z (1)

$$\alpha \,\&\, K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_{p_1}) \,\&\ldots\&\, K(X^{i_n}_{j_n}; X^2_{p_n}) \rightarrow K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_m) \,\&\ldots\&\, K(X^{i_n}_{j_n}; X^2_m) \in T,$$

co z uwagi na założenie $X^2_m \neq X^2_{p_1}, ..., X^2_{p_n}, X^{i_1}_{j_1}, ..., X^{i_n}_{j_n}$ daje

(5)
$$[(EX^2_m)\alpha] \,\&\, K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_{p_1}) \,\&\, \ldots \,\&\, K(X^{i_n}_{j_n}; X^2_{p_n}) \rightarrow$$
$$\rightarrow (EX^2_m)[K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_m) \,\&\, \ldots \,\&\, K(X^{i_n}_{j_n}; X^2_m)] \in T.$$

Z (2) wnosimy, że $(EX^2_m)\alpha \in T$, wzór (5) daje tedy

$$K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_{p_1}) \,\&\, \ldots \,\&\, K(X^{i_n}_{j_n}; X^2_{p_n}) \rightarrow (EX^2_m)[K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_m) \,\&\ldots\&$$
$$\&\, K(X^{i_n}_{j_n}; X^2_m)] \in T.$$

Wobec $X^2_{p_k} \neq X^{i_l}_{j_l}$ $(k, l=1, 2, ..., n)$ możemy w poprzedniku tej tezy dołączyć małe kwantyfikatory, otrzymując żądaną tezę

$$[(EX^2_{p_1})K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_{p_1})] \& ... \& [(EX^2_{p_n}) K (X^{i_n}_{j_n}; X^2_{p_n})] \to$$
$$\to (EX^2_m)[K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_m) \& ... \& K(X^{i_n}_{j_n}; X^2_m)] \in T.$$

Możemy obecnie wykazać, że dla $\theta = \theta_*$ funkcje zdaniowe zbioru L spełniają wzór (1) lemmatu 3.1.

4.6. Lemmat: *jeśli* $\alpha \in L$, *to istnieje liczba* p *taka, że dla* $n \geqslant p$ $o(p_n(\alpha)) \in T$.

Dowód. Funkcja $\alpha \in L$ posiadać musi jedną z postaci: § 1, 4.11, 4.12, 4.13. W pierwszym wzgl. trzecim przypadku słuszność lemmatu 4.6 wynika z lemmatu 3.3 wzgl. z lemmatów 3.4 i 4.4. Pozostaje więc rozpatrzeć przypadek, w którym α posiada postać § 1, 4.12 tj., w którym istnieje funkcja zdaniowa β i liczby k, l, m takie, że $X^{k+1}_m \bar{\in} Fr(\beta)$ i

$$(1) \qquad \alpha = (EX^{k+1}_m)(X^k_l)(X^k_l \,\varepsilon\, X^{k+1}_m \leftrightarrow \beta).$$

W myśl lemmatu 2.52 istnieje liczba p taka, że dla $n \geqslant p$ $p_n(\alpha) \in S_{\theta_*}$; jeśli dla skrótu przyjmiemy $q = m+n$, $r = l+n$, to z (1) otrzymamy na mocy lemmatu 1.2 b), c)

$$(2) \qquad p_n(\alpha) = (EX^{k+1}_q)(X^k_r)[X^k_r \,\varepsilon\, X^{k+1}_q \leftrightarrow p_n(\beta)].$$

Dla $n \geqslant p$ mamy, oznaczając dla krótkości $\theta = \theta_*$

$$(3) \qquad p_n(\alpha) \in S_\theta,$$

skąd jak łatwo się zorientować wynika

$$(4) \qquad p_n(\beta) \in S_\theta.$$

W myśl 2.2 i (3) otrzymujemy z (2)

$$(5) \qquad o^*(p_n(\alpha)) = (EX^{k+1}_q)(\theta(X^{k+1}_q) \& (X^k_r)\{\theta(X^k_r) \to$$
$$\to [X^k_r \,\varepsilon\, X^{k+1}_q \leftrightarrow o^*(p_n(\beta))]\}).$$

(Por. def. 4.1 c)). Niech $X^{i_1}_{j_1}, ..., X^{i_s}_{j_s}$ oznaczają wszystkie zmienne wolne funkcji $p_n(\alpha)$, przy czym $i_1 \leqslant ... \leqslant i_s$ i $j_h < j_{h+1}$ jeśli $i_h = i_{h+1}$ $(h = 1, 2, ..., s-1)$; w myśl lemmatu 2.53 zmienne te są również jedynymi zmiennymi wolnymi funkcji $o^*(p_n(\alpha))$. Możemy stąd łatwo wywnioskować, że $Fr(o^*(p_n(\beta))) = \{X^{i_1}_{j_1}, ..., X^{i_s}_{j_s}\}$, lub $Fr(o^*(p_n(\beta))) = \{X^k_r, X^{i_1}_{j_1}, ..., X^{i_s}_{j_s}\}$. Istotnie, z $X^{k+1}_m \bar{\in} Fr(\beta)$ wynika na mocy lemmatu

1.2 e) $X_q^{k+1} \bar{\epsilon} Fr(p_n(\beta))$, a więc (lemmat 2.53) $X_q^{k+1} \bar{\epsilon} Fr(o^*(p_n(\beta)))$; z wzoru (5) wnosimy tedy, że każda zmienna wolna funkcji $o^*(p_n(\beta))$, która różna jest od X_r^k należy do $Fr(o^*(p_n(\alpha)))$, skąd (wobec uwagi, że $Fr(o^*(p_n(\alpha))) \subset Fr(o^*(p_n(\beta)))$) wynika, że istotnie $Fr(o^*(p_n(\beta)))$ równa się bądź $\{X_{j_1}^{i_1}, \ldots, X_{j_s}^{i_s}\}$, bądź $\{X_r^k, X_{j_1}^{i_1}, \ldots, X_{j_s}^{i_s}\}$. Wnosimy stąd, że przy oznaczeniu

$$(6) \qquad \gamma(X_t^k, X_{h_1}^{i_1}, \ldots, X_{h_s}^{i_s}) \overset{Df}{=} Sb_{t|r}^{k} {}_{h_1|j_1}^{i_1} \ldots {}_{h_s|j_s}^{i_s} (o^*(p_n(\beta)) \& \theta(X_r^k))$$

$(h_1, \ldots, h_s, t = 1, 2, \ldots)$ zachodzi

$$(7) \qquad Fr(\gamma(X_t^k, X_{h_1}^{i_1}, \ldots, X_{h_s}^{i_s})) = \{X_t^k, X_{h_1}^{i_1}, \ldots, X_{h_s}^{i_s}\}$$

dla każdego układu liczb $t, h_1, \ldots, h_s$ takiego, że żadna ze zmiennych $X_t^k, X_{h_1}^{i_1}, \ldots, X_{h_s}^{i_s}$ wstawiona odpowiednio zamiast zmiennych X_r^k, $X_{j_1}^{i_1}, \ldots, X_{j_s}^{i_s}$ na te miejsca w wyrażeniu $o^*(p_n(\beta)) \& \theta(X_r^k)$, w których X_r^k, wzgl. $X_{j_1}^{i_1}$, wzgl. ..., wzgl. $X_{j_s}^{i_s}$ są wolne, nie staje się na żadnym z tych miejsc zmienną związaną.

W myśl (3) i 2.3

$$(8) \qquad o(p_n(\alpha)) = \theta(X_{j_1}^{i_1}) \& \ldots \& \theta(X_{j_s}^{i_s}) \to o^*(p_n(\alpha)).$$

Zastosujmy teraz lemmat § 1, 5.661 do funkcji (6); zgodnie z (7) otrzymamy

$$(9) \qquad \begin{aligned} &B_k(X_h^4; X_{r'}^k, X_{r''}^k) \& B_{i_1}(X_h^4; X_{j_1'}^{i_1}, X_{j_1''}^{i_1}) \& \ldots \& B_{i_s}(X_h^4; X_{j_s'}^{i_s}, X_{j_s''}^{i_s}) \to \\ &\to [\gamma(X_{r'}^k, X_{j_1'}^{i_1}, \ldots, X_{j_s'}^{i_s}) \leftrightarrow \gamma(X_{r''}^k, X_{j_s''}^{i_1}, \ldots, X_{j_s''}^{i_s})] \epsilon T \end{aligned}$$

dla każdego układu liczb $r', j_1', \ldots, j_s', r'', j_1'', \ldots, j_s''$ takiego, by — na mocy (7) — zachodziły wzory $Fr(\gamma(X_{r'}^k, X_{j_1'}^{i_1}, \ldots, X_{j_s'}^{i_s})) = \{X_{r'}^k, X_{j_1'}^{i_1}, \ldots, X_{j_s'}^{i_s}\}$, $Fr(\gamma(X_{r''}^k, X_{j_1''}^{i_1}, \ldots, X_{j_s''}^{i_s})) = \{X_{r''}^k, X_{j_1''}^{i_1}, \ldots, X_{j_s''}^{i_s}\}$ i h takiego, by $X_h^4 \neq X_{r'}^k, X_{j_1'}^{i_1}, \ldots, X_{j_s'}^{i_s}, X_{r''}^k, X_{j_1''}^{i_1}, \ldots, X_{j_s''}^{i_s}$. W szczególności przyjąć możemy $j_t' = j_t'' = j_t$ $(t = 1, 2, \ldots, s)$; wzór (9) daje wówczas na mocy definicji § 1, 5.63

$$(10) \qquad \begin{aligned} &B_k(X_h^4; X_{r'}^k, X_{r''}^k) \& N_{i_1}(X_h^4; X_{j_1}^{i_1}) \& \ldots \& N_{i_s}(X_h^4; X_{j_s}^{i_s}) \to \\ &\to [\gamma(X_{r'}^4, X_{j_1}^{i_1}, \ldots, X_{j_s}^{i_s}) \leftrightarrow \gamma(X_{r''}^4, X_{j_1}^{i_1}, \ldots, X_{j_s}^{i_s}) \epsilon T. \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$(11) \qquad \delta \overset{Df}{=} (X_r^k)[X_r^k \varepsilon X_q^{k+1} \leftrightarrow \gamma(X_r^k, X_{j_1}^{i_1}, \ldots, X_{j_s}^{i_s})].$$

Z (10) i (11) wyprowadzamy łatwym rachunkiem tezę

$$\delta \& N_{i_1}(X_h^4; X_{j_1}^{i_1}) \& \ldots \& N_{i_s}(X_h^4; X_{j_s}^{i_s}) \rightarrow [B_k(X_h^4; X_{r'}^k, X_{r''}^k) \rightarrow$$
$$\rightarrow (X_{r'}^k \varepsilon X_q^{k+1} \leftrightarrow X_{r''}^k \varepsilon X_q^{k+1})] \epsilon T.$$

Ponieważ liczby r', r'' możemy obrać dowolnie duże, przeto w następniku tego wyrażenia dołączyć możemy kwantyfikatory $(X_{r'}^k)(X_{r''}^k)$; stosując tedy definicję § 1, 5.62 otrzymamy

$$G(X_h^4) \& \delta \& N_{i_1}(X_h^4; X_{j_1}^{i_1}) \& \ldots \& N_{i_s}(X_h^4; X_{j_s}^{i_s}) \rightarrow B_{k+1}(X_h^4; X_q^{k+1}, X_q^{k+1}) \epsilon T.$$

tzn. na mocy definicji § 1, 5.63

$$(12)\quad G(X_h^4) \& \delta \& N_{i_1}(X_h^4; X_{j_1}^{i_1}) \& \ldots \& N_{i_s}(X_h^4; X_{j_s}^{i_s}) \rightarrow N_{k+1}(X_h^4; X_q^{k+1}) \epsilon T.$$

Załóżmy, że zmienna X_t^2 jest różna od wszystkich zmiennych $X_{j_1}^{i_1}, \ldots, X_{j_s}^{i_s}, X_q^{k+1}$; definicja 4.1 a) daje z łatwością

$$K(X_{j_1}^{i_1}; X_t^2) \& \ldots \& K(X_{j_s}^{i_s}; X_t^2) \& G(X_h^4) \& N^*(X_h^4; X_t^2) \rightarrow$$
$$\rightarrow N_{i_1}(X_h^4; X_{j_1}^{i_1}) \& \ldots \& N_{i_s}(X_h^4; X_{j_s}^{i_s}) \epsilon T,$$

skąd na mocy (12) wnioskujemy, że

$$(13)\quad \delta \& K(X_{j_1}^{i_1}; X_t^2) \& \ldots \& K(X_{j_s}^{i_s}; X_t^2) \& G(X_h^4) \& N^*(X_h^4; X_t^2) \rightarrow$$
$$\rightarrow N_{k+1}(X_h^4; X_q^{k+1}) \epsilon T.$$

Teza ta została wyprowadzona przy założeniu, że

$$X_h^4 \neq X_{r'}^k, X_{r''}^k, X_{j_1}^{i_1}, \ldots, X_{j_s}^{i_s},$$

możemy zatem obrać h tak, by zmienna X_h^4 nie była wolna w wyrażeniu $\delta \& K(X_{j_1}^{i_1}; X_t^2) \& \ldots \& K(X_{j_s}^{i_s}; X_t^2)$. Możemy wówczas wyprowadzić z (13)

$$(14)\quad \delta \& K(X_{j_1}^{i_1}; X_t^2) \& \ldots \& K(X_{j_s}^{i_s}; X_t^2) \rightarrow (X_h^4)[G(X_h^4) \& N^*(X_h^4; X_t^2) \rightarrow$$
$$\rightarrow N_{k+1}(X_h^4; X_q^{k+1})] \epsilon T.$$

Ponieważ

$$(X_h^4)[G(X_h^4) \& N^*(X_h^4; X_t^2) \rightarrow N_{k+1}(X_h^4; X_q^{k+1})] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (X_{q+1}^4)[G(X_{q+1}^4) \& N^*(X_{q+1}^4; X_t^2) \rightarrow N_{k+1}(X_{q+1}^4; X_q^{k+1})] \epsilon T,$$

przeto z (14) wynika na mocy definicji 4.1 a)

$$\delta \& K(X_{j_1}^{i_1}; X_t^2) \& \ldots \& K(X_{j_s}^{i_s}; X_t^2) \& S(X_t^2) \rightarrow K(X_q^{k+1}; X_t^2) \epsilon T.$$

Wyprowadzamy stąd od razu

$$(15)\quad \delta \& (EX_t^2)[K(X_{j_1}^{i_1}; X_t^2) \& \ldots \& K(X_{j_s}^{i_s}; X_t^2) \& S(X_t^2)] \rightarrow$$
$$\rightarrow (EX_t^2) K(X_q^{k+1}; X_t^2) \epsilon T,$$

a wzór ten daje

$$(16)\quad \delta\&(EX_t^2)[K(X_{j_1}^{i_1};X_t^2)\&\ldots\&K(X_{j_s}^{i_s};X_t^2)\&S(X_t^2)]\rightarrow \rightarrow(EX_2^2)K(X_q^{k+1};X_2^2)\epsilon T.$$

Przejście od (15) do (16) jest oczywiste, o ile $k \neq 1$; dla $k=1$ możliwe jest a priori, że $X_q^{k+1}=X_2^2$ i wtedy nie można z (15) wnioskować nic o słuszności (16), musimy więc wykluczyć równość $X_q^{k+1}=X_2^2$. Otóż $X_q^{k+1}\epsilon Vr(p_n(\alpha))$ na mocy (2), skąd na mocy (3) i definicji 2.51 wnosimy, że $X_q^{k+1}\bar{\epsilon} Vr(\theta(X_1^{k+1}))$, co dowodzi, że $X_q^{k+1}\neq X_2^2$, jako że $X_2^2\epsilon Vr(\theta(X_1^{k+1}))$ na mocy definicji 4.1 b).

Z (6) i (11) wynika $\delta\&X_r^k\varepsilon X_q^{k+1}\rightarrow\theta(X_r^k)\epsilon T$ co daje

$$\delta\rightarrow(X_r^k)[X_r^k\varepsilon X_q^{k+1}\rightarrow\theta(X_r^k)]\epsilon T,$$

albo po łatwym przekształceniu $\delta\rightarrow(X_1^k)[X_1^k\varepsilon X_q^{k+1}\rightarrow\theta(X_1^k)]\epsilon T$. Wzór ten łącznie z (16) daje na mocy definicji 4.1 b)

$$(17)\quad \delta\&(EX_t^2)[K(X_{j_1}^{i_1};X_t^2)\&\ldots\&K(X_{j_s}^{i_s};X_t^2)\&S(X_t^2)]\rightarrow\theta(X_q^{k+1})\epsilon T.$$

Zauważmy teraz, że z (6) i (11) wynika bez trudu teza

$$\delta\rightarrow((X_r^k)\{\theta(X_r^k)\rightarrow[X_r^k\varepsilon X_q^{k+1}\leftrightarrow o^*(p_n(\beta))]\})\epsilon T,$$

tak, że wzór (17) daje

$$\delta\&(EX_t^2)[K(X_{j_1}^{i_1};X_t^2)\&\ldots\&K(X_{j_s}^{i_s};X_t^2)\&S(X_t^2)]\rightarrow\theta(X_q^{k+1})\&(X_r^k)\{\theta(X_r^k)\rightarrow \rightarrow[X_r^k\varepsilon X_q^{k+1}\leftrightarrow o^*(p_n(\beta))]\}\epsilon T.$$

Z uwagi, że $X_q^{k+1}\neq X_{j_1}^{i_1},\ldots,X_{j_s}^{i_s}$ możemy z tej tezy otrzymać

$$[(EX_q^{k+1})\delta]\&(EX_t^2)[K(X_{j_1}^{i_1};X_t^2)\&\ldots\&K(X_{j_s}^{i_s};X_t^2)\&S(X_t^2)]\rightarrow \rightarrow(EX_q^{k+1})(\theta(X_q^{k+1})\&(X_r^k)\{\theta(X_r^k)\rightarrow[X_r^k\varepsilon X_q^{k+1}\leftrightarrow o^*(p_n(\beta))]\})\epsilon T.$$

Z uwagi na (5) i tezę $(EX_q^{k+1})\delta\epsilon T$ otrzymujemy stąd

$$(18)\quad (EX_t^2)[K(X_{j_1}^{i_1};X_t^2)\&\ldots\&K(X_{j_s}^{i_s};X_t^2)\&S(X_t^2)]\rightarrow o^*(p_n(\alpha))\epsilon T.$$

Musimy rozróżnić dwa przypadki: $s=0$, $s\neq 0$. W pierwszym z nich (18) daje na mocy lemmatu § 1, 5.533 a) $o^*(p_n(\alpha))\epsilon T$, co na mocy (8) dowodzi, że $o(p_n(\alpha))\epsilon T$. Jeśli natomiast $s\neq 0$, to stosując przede wszystkim definicję 4.1 a) wnosimy, że $K(X_{j_1}^{i_1};X_t^2)\rightarrow \rightarrow S(X_t^2)\epsilon T$, co pozwala tezę (18) uprościć do

$$(19)\quad (EX_t^2)[K(X_{j_1}^{i_1};X_t^2)\&\ldots\&K(X_{j_s}^{i_s};X_t^2)]\rightarrow o^*(p_n(\alpha))\epsilon T.$$

W myśl definicji 4.1 b)

(20) $$\theta(X^{i_k}_{j_k}) \to (EX^2_2)K(X^{i_k}_{j_k}; X^2_2) \in T \qquad (k=1,2,...,s);$$

niech $p_1, ..., p_s$ oznaczają liczby takie, by zmienne $X^2_{p_k}$ $(k=1,2,...,s)$ były wszystkie różne między sobą i różne od wszystkich zmiennych $X^{i_1}_{j_1}, ..., X^{i_s}_{j_s}, X^2_t$. Z (20) możemy wtedy wyprowadzić

$$\theta(X^{i_k}_{j_k}) \to (EX^2_{p_k})K(X^{i_k}_{j_k}; X^2_{p_k}) \in T \qquad (k=1,2,...,s).$$

Mnożąc logicznie te tezy otrzymujemy

$$\theta(X^{i_1}_{j_1})\&...\&\theta(X^{i_s}_{j_s}) \to [(EX^2_{p_1})K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_{p_1})]\&...\&[(EX^2_{p_s})K(X^{i_s}_{j_s}; X^2_{p_s})] \in T,$$

skąd powołując się na lemmat 4.5 otrzymujemy

$$\theta(X^{i_1}_{j_1})\&...\&\theta(X^{i_s}_{j_s}) \to (EX^2_t)[K(X^{i_1}_{j_1}; X^2_t)\&...\&K(X^{i_s}_{j_s}; X^2_t)] \in T.$$

Z tezy tej i z (19) wynika

$$\theta(X^{i_1}_{j_1})\&...\&\theta(X^{i_s}_{j_s}) \to o^*(p_n(\alpha)) \in T,$$

tj. na mocy (8) $o_\theta(p_n(\alpha)) \in T$. Lemmat 4.6 jest w ten sposób udowodniony.

5. Porównując wyniki, uzyskane w lemmatach 3.2, 4.3 i 4.6 z lemmatem 3.1 widzimy, że jeśli $\theta=\theta_*$, to warunek (1) lemmatu 3.1 będzie zawsze spełniony, o ile spełniają go zdania zbioru M. W § 3 w grę wchodzić będzie li tylko przypadek $M=\{(EX^2_1)\overline{S(X^2_1)}\}$. Wykażemy więc tu od razu, że przy tym obiorze M warunek (1) lemmatu 3.1 jest dla $\theta=\theta_*$ spełniony; przy okazji uzyskamy kilka tez, na które powołamy się w § 3.

5.1. Lemmat: *jeśli* $\theta=\theta_*$, *to* $(X^1_1)(X^1_1 \varepsilon X^2_1) \to \theta(X^2_1) \in T$.

Dowód. Przyjmijmy dla skrótu

(1) $$\alpha(X^2_1) \overset{Df}{=} (X^1_1)(X^1_1 \varepsilon X^2_1).$$

W myśl lemmatu 4.2

(2) $$\alpha(X^2_1) \to (X^1_1)[X^1_1 \varepsilon X^2_1 \to \theta(X^1_1)] \in T.$$

Z (1) i lemmatu § 1, 5.663 wynika

$$\alpha(X^2_1) \& G(X^4_2) \to N_2(X^4_2; X^2_1) \in T,$$

a z tezy tej wyprowadzamy bez trudu

(3) $$\alpha(X^2_1) \& S(X^2_2) \to K(X^2_1; X^2_2) \in T$$

(por. def. 4.1 a)). Z (3) wynika na mocy lemmatu § 1, 5.533 a)

$$a(X_1^2) \rightarrow (EX_2^2) K(X_1^2; X_2^2) \in T.$$

Łącząc ten wzór z (2) i stosując definicję 4.1 b) otrzymujemy

$$a(X_1^2) \rightarrow \theta(X_1^2) \in T,$$

co na mocy (1) równoważne jest z stwierdzeniem lemmatu.

5.2. Lemmat: *jeśli* $\theta = \theta_*$, *to* $S(X_1^2) \rightarrow \theta(X_1^2) \in T$.

Dowód. W myśl definicji § 1, 5.63, 5.64

$$N^*(X_2^4; X_1^2) \,\&\, X_1^1 \varepsilon X_1^2 \rightarrow B_1(X_2^4; X_1^1, X_1^1) \in T,$$

skąd wynika

(1) $$N^*(X_2^4; X_1^2) \,\&\, X_1^1 \varepsilon X_1^2 \,\&\, B_1(X_2^4; X_1^1, X_2^1) \rightarrow \rightarrow B_1(X_2^4; X_1^1, X_1^1) \,\&\, B_1(X_2^4; X_1^1, X_2^1) \in T;$$

ponieważ zaś (lemmat § 1, 5.666 a))

$$B_1(X_2^4; X_1^1, X_1^1) \,\&\, B_1(X_2^4; X_1^1, X_2^1) \rightarrow X_1^1 Id X_2^1 \in T,$$

przeto wzór (1) daje

$$N^*(X_2^4; X_1^2) \,\&\, X_1^1 \varepsilon X_1^2 \,\&\, B_1(X_2^4; X_1^1, X_2^1) \rightarrow X_1^1 Id X_2^1 \in T,$$

skąd wyprowadzamy na mocy lemmatu 5.12

(2) $$N^*(X_2^4; X_1^2) \,\&\, X_1^1 \varepsilon X_1^2 \,\&\, B_1(X_2^4; X_1^1, X_2^1) \rightarrow X_2^1 \varepsilon X_1^2 \in T.$$

W podobny sposób — powołując się na lemmat § 1, 5.666 b) — wykazać można, że

$$N^*(X_2^4; X_1^2) \,\&\, X_2^1 \varepsilon X_1^2 \,\&\, B_1(X_2^4; X_1^1, X_2^1) \rightarrow X_1^1 \varepsilon X_1^2 \in T,$$

co łącznie z (2) daje

$$N^*(X_2^4; X_1^2) \rightarrow (X_1^1)(X_2^1)[B_1(X_2^4; X_1^1, X_2^1) \rightarrow (X_1^1 \varepsilon X_1^2 \leftrightarrow X_2^1 \varepsilon X_1^2)] \in T,$$

tzn.

$$G(X_2^4) \,\&\, N^*(X_2^4; X_1^2) \rightarrow N_2(X_2^4; X_1^2) \in T$$

(por. def. § 1, 5.62, 5.63). Z tezy tej wyprowadzamy

$$S(X_1^2) \rightarrow (EX_2^2)\{S(X_2^2) \,\&\, (X_2^4)[G(X_2^4) \,\&\, N^*(X_2^4; X_1^2) \rightarrow N_2(X_2^4; X_1^2)]\} \in T,$$

tzn.

(3) $$S(X_1^2) \rightarrow (EX_2^2) K(X_1^2; X_2^2) \in T.$$

Lemmat 4.2 daje

$$S(\mathfrak{X}_1^2)\to(X_1^1)[X_1^1\,\varepsilon\,X_1^2\to\theta(X_1^1)]\,\varepsilon\,T,$$

co łącznie z (3) i definicją 4.1 b) daje $S(X_1^2)\to\theta(X_1^2)\in T$, c.b.d.o.

5.3. Lemmat: *jeśli* $\theta=\theta_*$ *zaś* n *jest liczbą taką, że* $S(X_n)\in S_\theta$, *to* $S(X_n^2)\leftrightarrow o^*(S(X_n^2))\in T$.

Dowód. Przyjmijmy dla uproszczenia pisowni

$$\xi\overset{Df}{=}X_n^1,\quad \eta\overset{Df}{=}X_{n+1}^1,\quad X\overset{Df}{=}X_n^2,\quad Y\overset{Df}{=}X_{n+1}^2,\quad Z\overset{Df}{=}X_{n+2}^2,\quad \mathfrak{X}\overset{Df}{=}X_n^3.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy z definicji § 1, 5.52, 5.51 i 2.39

$$S(X_n^2)=(\mathfrak{X})\{(Y)[(\xi)\overline{(\xi\,\varepsilon\,Y)}\to Y\varepsilon\mathfrak{X}]\,\&$$
$$\&\,(Y)(Z)(\xi)((\eta)\{\eta\,\varepsilon\,Y\leftrightarrow[\eta\,\varepsilon\,Z\vee(Y)(\eta\,\varepsilon\,Y\to\xi\,\varepsilon\,Y)]\}\,\&$$
$$\&\,Z\,\varepsilon\,\mathfrak{X}\to Y\,\varepsilon\,\mathfrak{X})\to X\,\varepsilon\,\mathfrak{X}\}.$$

Stosując definicję 2.2 i założenie o liczbie n wyprowadzamy stąd łatwo

$$o^*(S(X_n^2))\leftrightarrow(\mathfrak{X})\{\theta(\mathfrak{X})\to[(Y)(\theta(Y)\to\{(\xi)[\theta(\xi)\to\overline{\xi\,\varepsilon\,Y}]\to Y\varepsilon\,\mathfrak{X}\})\,\&$$
$$\&(Y)(Z)(\xi)(\theta(Y)\,\&\,\theta(Z)\,\&\,\theta(\xi)\to\{(\eta)[\theta(\eta)\to(\eta\,\varepsilon\,Y\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\{\eta\varepsilon Z\vee(Y)[\theta(Y)\to(\eta\varepsilon Y\to\xi\,\varepsilon\,Y)]\})]\,\&\,Z\,\varepsilon\,\mathfrak{X}\to Y\varepsilon\,\mathfrak{X}\})\to X\varepsilon\mathfrak{X}]\}\in T.$$

Długą tę tezę możemy uprościć, stosując przekształcenia rachunku zdań a nadto opierając się na uwadze, że jeśli $\alpha\in T$, to $(\alpha\to\beta)\leftrightarrow\beta\in T$; opierając się więc na lemmacie 4.2 otrzymamy

(1) $$o^*(S(X_n^2))\leftrightarrow(\mathfrak{X})\{\theta(\mathfrak{X})\,\&\,(Y)[\theta(Y)\,\&\,(\xi)\overline{(\xi\,\varepsilon\,Y)}\to Y\varepsilon\,\mathfrak{X}]\,\&$$
$$\&(Y)(Z)(\xi)[\theta(Y)\&\theta(Z)\&(\eta)(\eta\,\varepsilon\,Y\leftrightarrow\{\eta\,\varepsilon\,Z\vee(Y)[\theta(Y)\to$$
$$\to(\eta\,\varepsilon\,Y\to\xi\,\varepsilon\,Y)]\})\,\&\,Z\,\varepsilon\,\mathfrak{X}\to Y\varepsilon\,\mathfrak{X}]\to X\,\varepsilon\,\mathfrak{X}\}\in T.$$

Z lemmatów 5.2 i § 1, 5.531 otrzymamy

(2) $$(\xi)\overline{(\xi\,\varepsilon\,Y)}\to\theta(Y)\in T.$$

Przyjmijmy dla krótkości

(3) $$A(Y,\eta)\overset{Df}{=}(\xi)(\xi\,\varepsilon\,Y\leftrightarrow\eta\,Id\,\xi);$$

mamy wówczas oczywiście

$$A(Y;\eta)\to S(Y)\in T,$$

co na mocy lemmatu 5.2 daje

(4) $$A(Y;\eta)\to\theta(Y)\in T.$$

Z (4) wnosimy, że

(5) $(Y)[\theta(Y) \to (\eta\,\varepsilon Y \to \xi\,\varepsilon Y)] \,\&\, A(Y;\eta) \,\&\, \eta\,\varepsilon Y \to \xi\,\varepsilon Y \in T;$

jak widać jednak z (3)

$$A(Y;\eta) \to \eta\,\varepsilon Y \in T \quad \text{i} \quad A(Y;\eta) \,\&\, \xi\,\varepsilon Y \to \eta\, Id\, \xi \in T,$$

z (5) wnosimy zatem, że

$$\{(Y)[\theta(Y) \to (\eta\,\varepsilon Y \to \xi\,\varepsilon Y)]\} \,\&\, A(Y;\eta) \to \eta\, Id\, \xi \in T,$$

co wobec uwagi, że z (3) wynika teza $(EY)A(Y;\eta) \in T$ daje

$$(Y)[\theta(Y) \to (\eta\,\varepsilon Y \to \xi\,\varepsilon Y)] \to \eta\, Id\, \xi \in T.$$

Implikacja odwrotna

$$\eta\, Id\, \xi \to (Y)[\theta(Y) \to (\eta\,\varepsilon Y \to \xi\,\varepsilon Y)] \in T$$

wynika łatwo z lemmatu § 1, 5.12, zachodzi zatem równoważność

$$\eta\, Id\, \xi \leftrightarrow (Y)[\theta(Y) \to (\eta\,\varepsilon Y \to \eta\,\varepsilon Y)] \in T.$$

Uwzględniając ten wzór i (2) otrzymujemy z (1) po szeregu łatwych przeróbek, w których szczegóły nie wchodzimy tezę

(6) $$\begin{gathered} o^*(S(X_n^2)) \leftrightarrow (\mathfrak{X})\{\theta(\mathfrak{X}) \,\&\, (Y)[(\xi)(\overline{\xi\,\varepsilon Y}) \to Y \varepsilon \mathfrak{X}] \,\&\, \\ (Y)(Z)(\xi)[\theta(Y) \,\&\, \theta(Z) \,\&\, O(Y;Z,\xi) \,\&\, Z \varepsilon \mathfrak{X} \to Y \varepsilon \mathfrak{X}] \to X \varepsilon \mathfrak{X}\} \in T \end{gathered}$$

(por. def. § 1, 5.51). Wobec lemmatu 5.2 otrzymujemy stąd

$$\begin{gathered} (\mathfrak{X})\{\theta(\mathfrak{X}) \,\&\, (Y)[(\xi)\, \overline{\xi\,\varepsilon Y} \to Y \varepsilon \mathfrak{X}] \,\&\, (Y)(Z)(\xi)[S(Y) \,\&\, S(Z) \,\&\, \\ \&\, O(Y;Z,\xi) \,\&\, Z \varepsilon \mathfrak{X} \to Y \varepsilon \mathfrak{X}] \to X \varepsilon \mathfrak{X}\} \to o^*(S(X_n^2)) \in T \end{gathered}$$

i tym bardziej

$$\begin{gathered} (\mathfrak{X})\{(Y)[(\xi)\, \overline{\xi\,\varepsilon Y} \to Y \varepsilon \mathfrak{X}] \,\&\, (Y)(Z)(\xi)[S(Y) \,\&\, S(Z) \,\&\, O(Y;Z,\xi) \,\&\, \\ \&\, Z \varepsilon \mathfrak{X} \to Y \varepsilon \mathfrak{X}] \to X \varepsilon \mathfrak{X}\} \to o^*(S(X_n^2)) \in T. \end{gathered}$$

Na podstawie lemmatu § 1, 5.536 lewa strona tej implikacji równoważna jest funkcji $S(X_n^2)$; zatem

(7) $$S(X_n^2) \to o^*(S(X_n^2)) \in T.$$

Dowód implikacji odwrotnej jest nieco dłuższy. Oznaczmy dla skrótu

(8) $$\alpha(\mathfrak{X}) \overset{Df}{=} (X)[X\varepsilon\mathfrak{X} \leftrightarrow S(X)];$$

jest jasne, że

$$\alpha(\mathfrak{X}) \,\&\, (\xi)(\overline{\xi\varepsilon Y}) \rightarrow Y\varepsilon\mathfrak{X} \epsilon T,$$

$$\alpha(\mathfrak{X}) \,\&\, O(Y; Z, \xi) \,\&\, Z\varepsilon\mathfrak{X} \rightarrow Y\varepsilon\mathfrak{X} \epsilon T$$

(por. lemmaty § 1, 5.531, 5.532). Z wzorów tych wynika łatwo

(9) $$\alpha(\mathfrak{X}) \rightarrow (Y)[(\xi)(\overline{\xi\varepsilon Y}) \rightarrow Y\varepsilon\mathfrak{X}] \,\&\, (Y)(Z)(\xi)[\theta(Y) \,\&\, \theta(Z) \,\&\, O(Y; Z, \xi) \,\&\, Z\varepsilon\mathfrak{X} \rightarrow Y\varepsilon\mathfrak{X}] \epsilon T.$$

Wobec lemmatu 5.2 i (8)

(10) $$\alpha(\mathfrak{X}) \rightarrow (X)[X\varepsilon\mathfrak{X} \rightarrow \theta(X)] \epsilon T.$$

Lemmat § 1, 5.664 daje wobec (8)

$$\alpha(\mathfrak{X}) \rightarrow [G(X^4_{n+1}) \,\&\, N^*(X^4_{n+1}; X^2_2) \rightarrow N_3(X^4_{n+1}; \mathfrak{X})] \epsilon T,$$

skąd na mocy definicji 4.1 a) wnosimy, że

$$\alpha(\mathfrak{X}) \,\&\, S(X^2_2) \rightarrow K(\mathfrak{X}; X^2_2) \epsilon T.$$

Powołując się na lemmat § 1, 5.533 a) otrzymamy

$$\alpha(\mathfrak{X}) \rightarrow (EX^2_2)K(\mathfrak{X}; X^2_2) \epsilon T,$$

co łącznie z (10) i definicją 4.1 b) daje

(11) $$\alpha(\mathfrak{X}) \rightarrow \theta(\mathfrak{X}) \epsilon T.$$

Z (6), (9) i (11) wynika teraz

$$o^*(S(X^2_n)) \,\&\, \alpha(\mathfrak{X}) \rightarrow X^2_n \varepsilon\mathfrak{X} \epsilon T,$$

skąd po łatwym przekształceniu na podstawie (8) wyprowadzamy

$$o^*(S(X^2_n)) \,\&\, \alpha(\mathfrak{X}) \rightarrow S(X^2_n) \epsilon T.$$

Z tezy tej i uwagi, że $(E\mathfrak{X})\alpha(\mathfrak{X})\epsilon T$ wynika $o^*(S(X^2_n)) \rightarrow S(X^2_n)\epsilon T$, co łącznie z (7) dowodzi lemmatu 5.3.

Opierając się na lemmacie 5.3 łatwo teraz wykazać słuszność następującego lemmatu:

5.4. Lemmat: *jeśli $\theta = \theta_*$, to istnieje liczba m taka, że dla $n \geqslant m$ $o(p_n((EX^2_1)\overline{S(X^2_1)})) \epsilon Fl(\{(EX^2_1)\overline{S(X^2_1)}\})$.*

Dowód. Z definicji 1.1 i § 1, 5.52, 5.51, 2.39 wnosimy łatwo, że

(1) $$p_n(S(X^2_1)) = S(X^2_{n+1});$$

w myśl więc lemmatu 2.52 istnieje liczba m taka, że dla $n \geqslant m$

(2) $$S(X^2_{n+1}) \epsilon S_\theta .$$

Z (1) wyprowadzamy łatwo na podstawie lemmatu 1.2 b), c)

(3) $$p_n((EX^2_1)\overline{S(X^2_1)}) = (EX^2_{n+1})\overline{S(X^2_{n+1})},$$

przy czym na mocy (2) $X^2_{n+1} \bar{\epsilon} Vr(\theta(X^2_1))$; stosując więc definicję 2.3 otrzymamy z (3)

$$o(p_n((EX^2_1)\overline{S(X^2_1)})) = (EX^2_{n+1})\theta(X^2_{n+1}) \,\&\, o^*(\overline{S(X^2_{n+1})}).$$

Wobec (2) i lemmatu 5.3 możemy stąd wywnioskować, że

(4) $$o(p_n((EX^2_1)\overline{S(X^2_1)})) \leftrightarrow (EX^2_{n+1})[\theta(X^2_{n+1}) \,\&\, \overline{S(X^2_{n+1})}] \epsilon T.$$

Lemmaty 5.1 i § 1, 5.534 dają łącznie tezę

$$\overline{(EX^2_1)S(X^2_1)} \,\&\, (X^1_1)(X^1_1 \varepsilon X^2_{n+1}) \rightarrow \theta(X^2_{n+1}) \,\&\, \overline{S(X^2_{n+1})} \epsilon T,$$

skąd wobec $(EX^2_1)(X^1_1)(X^1_1 \varepsilon X^2_{n+1}) \epsilon T$ wnosimy, że

$$(EX^2_{n+1})[\theta(X^2_{n+1}) \,\&\, \overline{S(X^2_{n+1})}] \epsilon Fl(\{(EX^2_1)\overline{S(X^2_1)}\}).$$

Wzór ten daje łącznie z (4)

$$o(p_n((EX^2_1)\overline{S(X^2_1)})) \epsilon Fl(\{(EX^2_1)\overline{S(X^2_1)}\}),$$ c. b. d. o.

6. Resumując wyniki naszej dyskusji dochodzimy do następującego twierdzenia:

6.1. ***Twierdzenie.*** *Jeśli $\delta \epsilon S$, zbiór $\{(EX^2_1)\overline{S(X^2_1)}\}$ jest niesprzeczny i istnieje liczba m taka, że dla $n \geqslant m$*

$$\overline{o(p_n(\delta))} \epsilon Fl(\{(EX^2_1)\overline{S(X^2_1)}\}), \quad \textit{to} \quad \delta \bar{\epsilon} Fl(\{(EX^2_1)S(X^2_1)\}).$$

Dowód otrzymujemy od razu z lemmatów 3.1, 3.2, 4.3, 4.6 i 5.4.

6.2. Analizując dowód twierdzenia 6.1 dojść można do pewnego jego uogólnienia. Wprowadźmy dwie dowolne funkcje zdaniowe $\alpha(X^2_n)$, $\beta(X^4_n)$ — jedną o jednej zmiennej wolnej drugiego typu, drugą o jednej zmiennej wolnej czwartego typu. Przyjmijmy następnie analogicznie do 4.1 definicje

$$K_{\alpha,\beta}(X_j^i; X_n^2) \overset{Df}{=} \alpha(X_n^2) \,\&\, (X_{j+1}^4)[\beta(X_{j+1}^4) \,\&\, N^*(X_{j+1}^4; X_n^2) \rightarrow$$
$$\rightarrow N_i(X_{j+1}^4; X_j^i)] \quad (\text{dla } X_j^i \neq X_n^2),$$
$$\theta_{\alpha,\beta}(X_1^1) \overset{Df}{=} (EX_2^2) K_{\alpha,\beta}(X_1^1; X_2^2),$$
$$\theta_{\alpha,\beta}(X_1^{i+1}) \overset{Df}{=} (X_1^i)[X_1^i \,\varepsilon\, X_1^{i+1} \rightarrow \theta_{\alpha,\beta}(X_1^i)] \,\&\, (EX_2^2) K_{\alpha,\beta}(X_1^{i+1}; X_2^2).$$

(Dla uproszczenia przyjmujemy tu, że podstawienia, jakie potrzebne są do napisania tych wzorów są wykonalne, a więc np., że zmienna X_{j+1}^4 nie stanie się związaną w $\beta(X_n^4)$, gdy wstawimy ją na te miejsca w funkcji $\beta(X_n^4)$, w których X_n^4 jest zmienną wolną itp.). Można wówczas udowodnić bez trudu następujące uogólnienie twierdzenia 6.1: *jeśli $\delta \in S$, M jest zbiorem niesprzecznym zdań, M' — podzbiorem M, $\alpha(X_n^2)$, $\beta(X_n^4)$ — funkcje zdaniowe takie, że $Fr(\alpha(X_n^2)) = \{X_n^2\}$, $Fr(\beta(X_n^4)) = \{X_n^4\}$, $\theta = \theta_{\alpha,\beta}$ i jeśli spełnione są warunki:*

(1) $\quad (EX_n^2)\alpha(X_n^2) \in Fl(M), \quad (X_n^4)[\beta(X_n^4) \rightarrow G(X_n^4)] \in Fl(M),$

(2) $\quad \alpha(X_{n_1}^2) \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha(X_{n_s}^2) \,\&\, (X_1^1)[X_1^1 \,\varepsilon\, X_n^2 \leftrightarrow (X_1^1 \,\varepsilon\, X_{n_1}^2 \vee \ldots \vee X_1^1 \,\varepsilon\, X_{n_s}^2)] \rightarrow$
$\quad\quad \rightarrow \alpha(X_n^2) \in Fl(M) \quad$ *dla* $s = 1, 2, 3, \ldots,$

(3) *dla każdego $a \in M'$ istnieje m takie, że $o_\theta(p_n(a)) \in Fl(M)$ dla $n \geqslant m$,*

(4) *istnieje m takie, że $\overline{o_\theta(p_n(\delta))} \in Fl(M)$ dla $n \geqslant m$,*

to $\delta \,\bar{\in}\, Fl(M')$. Jeśli przy tym $(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)} \in M$, to na to, by istniała liczba m taka, że $o_\theta(p_n((EX_1^2)\overline{S(X_1^2)})) \in Fl(M)$ dla $n \geqslant m$ wystarcza, by

$$(X_1^2)[S(X_1^2) \rightarrow \theta(X_1^2)] \in Fl(M) \quad i \quad (X_1^1)\theta(X_1^1) \in Fl(M).$$

Dowód tego twierdzenia nie różni się zasadniczo od dowodu twierdzenia 6.1. Nie ulega jednak wątpliwości, że dla przeprowadzenia ścisłego dowodu niezależności pewnych zdań odwołać się trzeba do jeszcze ogólniejszej formy twierdzenia 6.1: to następne uogólnienie polegałoby na tym, że język logiki wzbogacamy pewnymi nowymi stałymi, oznaczającymi indywidua, lub ich zbiory różnych typów, a w związku z tym poddajemy modyfikacji takie pojęcia, jak funkcja zdaniowa, dowód itd.

7. Ujęcie metody relatywizacji kwantyfikatorów, które przedstawiliśmy w poprzednich numerach wystarczy w zupełności dla celów § 3; dla innych jednak badań okazać się ono może zbyt wąskie. Podamy tu przykład pojęcia, dla którego określenia od-

woływać się musimy do nieco ogólniejszego ujęcia metody relatywizacji kwantyfikatorów.

Rozważać będziemy tym razem klasę $\mathfrak{t}^*$ ciągów $\theta=[\theta_1,\theta_2,...,\theta_n,...]$, gdzie $Fr(\theta_n)=\{X_1^n, X_2^2\}$ dla $n=1,2,...$ i przyjmiemy podobnie jak w definicji 2.1 b) $\theta(X_p^n, X_2^2)\overset{Df}{=}Sb_{p|1}^n(\theta_n)$ dla $\theta\epsilon\mathfrak{t}^*$. Przyjmujemy następnie bez zmiany definicje 2.2 i 2.3, w których jednak θ oznacza ciąg nie klasy $\mathfrak{t}$, lecz $\mathfrak{t}^*$. Niech w szczególności θ^* oznacza ciąg klasy $\mathfrak{t}^*$ zdefiniowany indukcyjnie j. n.:

$$\theta_1^*\overset{Df}{=}X_1^1\varepsilon X_2^2,$$

$$\theta_{i+1}^*\overset{Df}{=}(X_1^i)[X_1^i\varepsilon X_1^{i+1}\rightarrow\theta_i^*].$$

Mówimy, że $\mathfrak{f}$ jest własnością wewnętrzną zbioru, jeśli istnieje zdanie α takie, że zbiór M posiada własność $\mathfrak{f}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór M spełnia funkcję zdaniową $o_{\theta^*}(p_2(\alpha))$ (co do występującego w tej definicji zwrotu »zbiór M spełnia funkcję zdaniową« por. Tarski [3], str. 308—312, 348—352, 354—358, 398). Zdefiniowane powyżej pojęcie pochodzi od Tarskiego i Lindenbauma (por. [1], str. 22); jest ono pomocne przy wysłowieniu pewnych twierdzeń np. z dziedziny metodologii topologii. Również wspominane przez Tarskiego ([6] ods. [20]) pojęcie terminu neksusowego wzgl. danego zbioru zdań dałoby się precyzyjnie zdefiniować przy pomocy podobnej jak wyżej konstrukcji.

§ 3. Dowody niezależności

Teorię opisaną w poprzednim paragrafie zastosujemy obecnie do ustalenia wzajemnej niezależności kilku zdań. Podstawą naszych rozumowań będzie twierdzenie, orzekające niezależność od aksjomatów logiki zdania, stwierdzającego istnienie zbioru nieskończonego (indywiduów pierwszego typu) o uzupełnieniu nieskończonym. Z tego twierdzenia wyprowadzimy następnie niezależność pewnika wyboru od aksjomatów logiki oraz twierdzenie, orzekające, że dowód równoważności definicji skończoności Dedekinda z definicją zwykłą nie daje się przeprowadzić bez odwoływania się do pewnika wyboru.

1. Ustalimy na początek kilka lemmatów.

1.1 Lemmat: *jeśli* $\theta=\theta_*$, *to*

$$\theta(X_1^2)\leftrightarrow\{S(X_1^2)\vee(EX_2^2)[C(X_2^2;X_1^2)\,\&\,S(X_2^2)]\}\,\epsilon\, T.$$

Dowód tego lemmatu opiera się na dwu tezach, które podamy, nie wyprowadzając ich formalnie z aksjomatów:

(1) $$C(X_2^2; X_1^2) \& G(X_2^4) \& N^*(X_2^4; X_2^2) \rightarrow N_2(X_2^4; X_1^2) \epsilon T;$$

(2) $$\overline{S(X_1^2)} \& (X_3^2)[C(X_3^2; X_1^2) \rightarrow \overline{S(X_3^2)}] \rightarrow (X_2^2)[S(X_2^2) \rightarrow \\ \rightarrow (EX_2^4) G(X_2^4) \& N^*(X_2^4; X_2^2) \& \overline{N(X_2^4; X_1^2)}] \epsilon T.$$

Teza (1) stwierdza, wyprowadzalność z aksjomatów logiki zdania o następującej treści: jeśli funkcja, która zbiór wszystkich indywiduów przekształca w siebie wzajemnie jednoznacznie — przekształca każdy element pewnego zbioru w siebie, to przekształca ona uzupełnienie tego zbioru samo w siebie. Dowód tego twierdzenia nie przedstawia więc żadnych trudności. Teza (2) orzeka wyprowadzalność zdania następującego: jeśli zarówno zbiór M, jak i jego uzupełnienie N (do zbioru wszystkich indywiduów) są nieskończone, to dla każdego skończonego zbioru P istnieje takie wzajemnie jednoznaczne przekształcenie f zbioru wszystkich indywiduów w siebie, że $f(p)=p$ dla $p \epsilon P$ i $f(M) \neq M$. (Zachowujemy tu zwykłą acz nieścisłą symbolikę: $f(p)$ oznacza wartość funkcji f dla argumentu p o ile p jest indywiduum, $f(M)$ zaś oznacza zbiór wartości, jakie funkcja f przyjmuje na zbiorze M). Dla dowodu wystarczy zauważyć, że w myśl założeń zbiory $M-P$ i $N-P$ są niepuste; niech $m \epsilon M-P$, $n \epsilon N-P$ i niech f oznacza funkcję taką, że $f(m)=n$, $f(n)=m$ i $f(q)=q$ dla $q \neq m, n$. f przekształca więc klasę wszystkich indywiduów w siebie i jest funkcją wzajemnie jednoznaczną. Dla $p \epsilon P$ $f(p)=p$, gdyż $m, n \bar{\epsilon} P$. Równość $f(M)=M$ nie zachodzi, bo $n \epsilon f(M)$ i $n \bar{\epsilon} M$. Formalizując wyżej zaznaczone rozumowanie otrzymujemy dowód tezy (2).

Opierając się na tezach (1) i (2) nie trudno już dowieść lemmatu. Mamy przede wszystkim

(3) $$S(X_1^2) \rightarrow \theta(X_1^2) \epsilon T$$

na mocy lemmatu § 2, 5.2. Wzór (1) daje

$$C(X_2^2; X_1^2) \& S(X_2^2) \rightarrow S(X_2^2) \& (X_2^4)[G(X_2^4) \& N^*(X_2^4; X_2^2) \rightarrow N_2(X_2^4; X_1^2)] \epsilon T,$$

skąd na podstawie definicji § 2, 4.1 a) wnosimy, że

(4) $$(EX_2^2)[C(X_2^2; X_1^2) \& S(X_2^2)] \rightarrow (EX_2^2) K(X_1^2; X_2^2) \epsilon T.$$

Lemmat § 2, 4.2 daje

$$(X_1^1)(X_1^1 \varepsilon X_1^2 \rightarrow \theta(X_1^1)) \epsilon T;$$

z tezy tej i z (4) otrzymujemy na podstawie definicji § 2, 4.1 b)

(5) $$(EX_2^2)[C(X_2^2;X_1^2)\&S(X_2^2)]\rightarrow\theta(X_1^2)\epsilon T.$$

Wzór (2) równoważny jest na mocy definicji § 2, 4.1 a) z

$$\overline{S(X_1^2)}\&(X_3^2)[C(X_3^2;X_1^2)\rightarrow\overline{S(X_3^2)}]\rightarrow\overline{(EX_2^2)K(X_1^2;X_2^2)}\epsilon T;$$

przez kontrapozycję otrzymujemy stąd (po zamianie zmiennej X_3^2 na X_2^2)

$$(EX_2^2)K(X_1^2;X_2^2)\rightarrow\{S(X_1^2)\vee(EX_2^2)[C(X_2^2;X_1^2)\&S(X_2^2)]\}\epsilon T.$$

Ponieważ zaś w myśl definicji § 2, 4.1 b) $\theta(X_1^2)\rightarrow(EX_2^2)K(X_1^2;X_2^2)\epsilon T$ przeto teza ta daje

(6) $$\theta(X_1^2)\rightarrow\{S(X_1^2)\vee(EX_2^2)[C(X_2^2;X_1^2)\&S(X_2^2)]\}\epsilon T.$$

Łącząc wzory (3), (5), (6) otrzymujemy żądany wynik.

1.2. Lemmat: *jeśli* $\theta=\theta_*$ *i* $C(X_m^2;X_n^2)\epsilon S_\theta$, *to*

$$C(X_m^2;X_n^2)\leftrightarrow o^*(C(X_m^2;X_n^2))\epsilon T.$$

Dowód. W myśl definicji § 1, 5.65, § 2, 2.2, § 2, 4.1 c)

$$o^*(C(X_m^2;X_n^2))=(X_m^1)[\theta(X_m^1)\rightarrow(X_m^1\varepsilon X_m^2\leftrightarrow\overline{X_m^1\varepsilon X_n^2})];$$

ponieważ zaś $\theta(X_m^1)\epsilon T$ na mocy lemmatu § 2, 4.2, przeto wynika stąd

$$o^*(C(X_m^2;X_n^2))\leftrightarrow(X_m^1)(X_m^1\varepsilon X_m^2\leftrightarrow\overline{X_m^1\varepsilon X_n^2})\epsilon T,$$

co dowodzi lemmatu.

1.3. Lemmat: *jeśli* $\theta=\theta_*$, *to* $\theta(X_1^2)\&C(X_3^2;X_1^2)\rightarrow\theta(X_3^2)\epsilon T.$

Dowód. Z lemmatów § 1, 5.667 i § 2, 5.2 wynika

(1) $$C(X_3^2;X_1^2)\&(EX_4^2)[C(X_4^2;X_1^2)\&S(X_4^2)]\rightarrow\theta(X_3^2)\epsilon T.$$

Na mocy lemmatu 1.1 otrzymujemy przez podstawienie

$$(EX_1^2)[C(X_1^2;X_3^2)\&S(X_1^2)]\rightarrow\theta(X_3^2)\epsilon T,$$

skąd

$$C(X_1^2;X_3^2)\&S(X_1^2)\rightarrow\theta(X_3^2)\epsilon T,$$

albo na podstawie lemmatu § 1, 5.668

(2) $$C(X_3^2;X_1^2)\&S(X_1^2)\rightarrow\theta(X_3^2)\epsilon T.$$

Z (1) i (2) wyprowadzamy od razu

(3) $$C(X_3^2; X_1^2) \& \{S(X_1^2) \vee (EX_4^2)[C(X_4^2; X_1^2) \& S(X_4^2)]\} \to \theta(X_3^2) \in T.$$

W myśl lemmatu 1.1

$$\theta(X_1^2) \to \{S(X_1^2) \vee (EX_4^2)[C(X_4^2; X_1^2) \& S(X_4^2)]\} \in T,$$

wzór (3) daje więc

$$\theta(X_1^2) \& C(X_3^2; X_1^2) \to \theta(X_3^2) \in T,$$ c. b. d. o.

1.4. L e m m a t: *istnieje liczba naturalna m taka, że dla $n \geqslant m$*

$$\overline{o(p_n((EX_1^2)\{\overline{S(X_1^2)} \& (X_2^2)[C(X_2^2; X_1^2) \to \overline{S(X_2^2)}]\}))} \in T.$$

D o w ó d. Przyjmijmy

(1) $$\delta \overset{Df}{=} (EX_1^2)\{\overline{S(X_1^2)} \& (X_2^2)[C(X_2^2; X_1^2) \to \overline{S(X_2^2)}]\};$$

jak łatwo sprawdzić, wychodząc z definicji § 1, 5.52, 5.65 zachodzi wówczas

(2) $$p_n(\delta) = (EX_{n+1}^2)\{\overline{S(X_{n+1}^2)} \& (X_{n+2}^2)[C(X_{n+2}^2; X_{n+1}^2) \to \overline{S(X_{n+2}^2)}]\}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Na mocy lemmatu § 2, 2.52 istnieje liczba m taka, że

(3) $$p_n(\delta) \in S_{\theta_*} \quad \text{dla} \quad n \geqslant m.$$

Z (2) i (3) otrzymamy na podstawie definicji § 2, 2.2 i 2.3

(4) $$o(p_n(\delta)) = (EX_{n+1}^2)(\theta(X_{n+1}^2) \& \overline{o^*(S(X_{n+1}^2))} \& (X_{n+2}^2)\{\theta(X_{n+2}^2) \to \\ \to [o^*(C(X_{n+2}^2; X_{n+1}^2)) \to \overline{o^*(S(X_{n+2}^2))}]\}),$$

przy czym dla skrócenia przyjęliśmy $\theta = \theta_*$. Z (3) wynika

$$S(X_{n+1}^2), \quad S(X_{n+2}^2), \quad C(X_{n+2}^2; X_{n+1}^2) \in S_\theta,$$

powołując się więc na lemmaty 1.2 i § 2, 5.3 i stosując reguły rachunku zdań otrzymamy z (4)

$$o(p_n(\delta)) \leftrightarrow (EX_{n+1}^2)\{\theta(X_{n+1}^2) \& \overline{S(X_{n+1}^2)} \& (X_{n+2}^2)[\theta(X_{n+2}^2) \& \\ \& C(X_{n+2}^2; X_{n+1}^2) \to \overline{S(X_{n+2}^2)}]\} \in T.$$

Przekształcając tę tezę na mocy lemmatu 1.3 otrzymamy

$$o(p_n(\delta)) \leftrightarrow (EX_{n+1}^2)\{\theta(X_{n+1}^2) \& \overline{S(X_{n+1}^2)} \& (X_{n+2}^2)[C(X_{n+2}^2; X_{n+1}^2) \to \\ \to \overline{S(X_{n+2}^2)}]\} \in T.$$

Lemmat 1.1 stwierdza, że prawa strona tej równoważności jest negacją tezy; tak samo więc i lewa strona musi być negacją tezy tzn. $\overline{o(p_n(\delta))} \epsilon T$, co wobec (1) dowodzi lemmatu.

Z lemmatu 1.4 otrzymujemy łatwo następujące twierdzenie:

1.5. ***Twierdzenie.*** *Jeśli zbiór* $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ *jest niesprzeczny, to*

$$(EX_1^2)\{\overline{S(X_1^2)} \& (X_2^2)[C(X_2^2; X_1^2) \rightarrow \overline{S(X_2^2)}]\} \overline{\epsilon} Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}).$$

Dla dowodu przyjmujemy $\delta = (EX_1^2)\{\overline{S(X_1^2)} \& (X_2^2)[C(X_2^2; X_1^2) \rightarrow \rightarrow \overline{S(X_2^2)}]\}$ w twierdzeniu § 2, 6.1; założenia tego twierdzenia są na mocy lemmatu 1.4 spełnione, spełniona jest więc i teza $\delta \overline{\epsilon} Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\})$, c. b. d. o.

Twierdzenie 1.5 przedstawia pierwszy z wyników, o których wspominaliśmy we wstępie do niniejszego paragrafu. Orzeka ono, że jeśli dołączenie pewnika nieskończoności do układu aksjomatów logiki nie prowadzi do sprzeczności, to niepodobna w tak wzbogaconym systemie dowieść istnienia zbioru nieskończonego, którego uzupełnienie byłoby nieskończone. O twierdzeniu tym wspomina Chwistek [1], str. 138, nie podając zresztą dowodu.

2. Zastosujemy obecnie twierdzenie 1.5 do zbadania stosunku między definicją skończoności Dedekinda, a definicją induktywności. Wprowadzimy w tym celu najpierw trzy definicje

$$2.1.\quad X_q^{p+1} \sim X_r^{p+1} \overset{Df}{=} (EX_q^{p+3}) J(X_q^{p+3}) \& D(X_q^{p+3}; X_q^{p+1}) \& \mathit{CI}(X_q^{p+3}; X_r^{p+1});$$

$$2.21.\quad S_1(X_q^{p+1}) \overset{Df}{=} (X_q^{p+2})(X_{q+1}^{p+2})\{(X_{q+1}^{p+1})[X_{q+1}^{p+1} \varepsilon X_{q+1}^{p+2} \leftrightarrow X_{q+1}^{p+1} \subseteq X_q^{p+1}] \& \& X_q^{p+2} \subset X_{q+1}^{p+2} \& X_q^{p+2} \sim X_{q+1}^{p+2} \rightarrow X_{q+1}^{p+2} \subseteq X_q^{p+2}\};$$

$$2.22.\quad S_2(X_q^{p+1}) \overset{Df}{=} (X_{q+1}^{p+1})[X_{q+1}^{p+1} \sim X_q^{p+1} \& X_{q+1}^{p+1} \subseteq X_q^{p+1} \rightarrow X_q^{p+1} \subseteq X_{q+1}^{p+1}].$$

Funkcja 2.21 orzeka, że klasa podzbiorów zbioru, oznaczonego symbolem X_q^{p+1} nie jest równej mocy z żadną swą częścią właściwą, funkcja zaś 2.22, że sam zbiór, oznaczony symbolem X_q^{p+1} nie jest równej mocy z żadną swą częścią właściwą. Funkcja zdaniowa $S_2(X_q^{p+1})$ jest więc sformalizowaniem znanej definicji skończoności, zaproponowanej przez Dedekinda ([1], str. 17). Funkcja zdaniowa $S_1(X_q^{p+1})$ jest sformalizowaniem własności, która — z intuicyjnego punktu widzenia — przysługuje również tylko zbiorom skończonym, która zatem może być przyjęta jako definicja skończoności; definicję tę podał prócz wielu innych Tarski ([1], str. 93, Définition III).

Zachodzą następujące związki wynikania:

2.3. Lemmat: a) $S_1(X_q^{p+1}) \rightarrow S_2(X_q^{p+1}) \epsilon T$, b) $S(X_1^2) \rightarrow S_1(X_1^2) \epsilon T$.

Dowód nie przedstawia najmniejszych trudności (por. Tarski [1], str. 94).

Wykażemy teraz, że implikacja odwrotna do implikacji a) lemmatu 2.3 dla $p=1$ nie jest tezą. W tym celu zanotujemy najpierw oczywisty lemmat następujący:

2.4 Lemmat: *pierwszym podniesieniem typu funkcji zdaniowej* $S_2(X_1^2) \rightarrow S_1(X_1^2)$ *jest* $S_2(X_1^3) \rightarrow S_1(X_1^3)$.

(Por. § 1, 6.1).

Podamy następnie dwa lemmaty, stwierdzające, że pewne dwie funkcje są konsekwencjami zbioru $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$; podawanie sformalizowanego dowodu na to byłoby nadzwyczaj uciążliwe, gdyż funkcje zdaniowe, wchodzące w grę, są nieco bardziej skomplikowane, zadowolimy się zatem przytoczeniem intuicyjnego szkicu dowodu, który musiałby być potem sformalizowany.

2.5. Lemmat:

$$(X_1^2)[X_1^2 \varepsilon X_1^3 \leftrightarrow S(X_1^2)] \rightarrow \overline{S_2(X_1^3)} \epsilon Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}).$$

Lemmat ten orzeka, że konsekwencją pewnika nieskończoności jest, że klasa zawierająca wszystkie zbiory skończone (induktywne) jest nieskończona w sensie definicji 2.22. Inaczej mówiąc: klasa A wszystkich podzbiorów zbioru zbiorów induktywnych jest nieskończona w sensie Dedekinda (przy założeniu pewnika nieskończoności). W tym sformułowaniu twierdzenie jest oczywiste, klasa A zawiera bowiem wszystkie liczby naturalne (tzn. klasy zbiorów skończonych, równych między sobą co do mocy), klasa zaś liczb naturalnych jest (przy założeniu pewnika nieskończoności) nieskończona w sensie Dedekinda (por. Russell i Whitehead [1], *124.12; z pewnika nieskończoności wynika, że moc zbioru liczb naturalnych jest równa $\aleph_0$).

2.6. Lemmat:

$$(X_1^2)[X_1^2 \varepsilon X_1^3 \leftrightarrow S(X_1^2)] \& \overline{S_2(X_1^3)} \rightarrow$$
$$\rightarrow (EX_1^2)\{\overline{S(X_1^2)} \& (X_2^2)[C(X_2^2; X_1^2) \rightarrow \overline{S(X_2^2)}]\} \epsilon T.$$

Lemmat ten orzeka, że jeśli klasa wszystkich zbiorów skończonych jest nieskończona w sensie Dedekinda, to istnieje zbiór nieskończony, którego uzupełnienie jest też nieskończone. Intuicyjna myśl dowodu jest następująca: jeśli klasa wszystkich

zbiorów skończonych jest nieskończona w sensie Dedekinda, to istnieje ciąg nieskończony $[K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots]$ różnych między sobą zbiorów skończonych. Niech L będzie dowolnym zbiorem skończonym; ponieważ klasa jego podzbiorów jest skończona, przeto istnieje liczba a taka, że dla $m \geqslant a$ K_m nie jest podzbiorem L. Najmniejszą z tych liczb oznaczamy przez $a(L)$ i definiujemy przez indukcję ciąg liczb naturalnych r_n jak następuje:

$$r_1 = 1, \quad r_{n+1} = a(\sum_{k=1}^{r_n} K_k).$$

Z definicji funkcji $a(L)$ wynika, że

$$r_n < r_{n+1}, \tag{1}$$

gdyż K_{r_n} jest podzbiorem $\sum_{k=1}^{r_n} K_k$; mamy nadto z definicji

$$K_{r_{n+1}} - \sum_{k=1}^{r_n} K_k \neq 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Jeśli $m < n$, to wobec (1) $r_{m+1} \leqslant r_n$, a więc $K_{r_{m+1}} \subset \sum_{k=1}^{r_n} K_k$ co daje

$$(K_{r_{n+1}} - \sum_{k=1}^{r_n} K_k) \cdot K_{r_{m+1}} = 0,$$

a więc tym bardziej

$$(K_{r_{n+1}} - \sum_{k=1}^{r_n} K_k) \cdot (K_{r_{m+1}} - \sum_{k=1}^{r_n} K_k) = 0 \quad \text{dla } m < n, \; m, n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Z (2) i (3) wynika, że oznaczając $W_n = K_{r_{n+1}} - \sum_{k=1}^{r_n} K_k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mieć będziemy $W_n \neq 0$ i $W_m \cdot W_n = 0$ dla $m, n = 1, 2, 3, \ldots$, $m \neq n$. Przyjmując tedy $W' = \sum_{k=1}^{\infty} W_{2k}$, $W'' = \sum_{k=1}^{\infty} W_{2k-1}$ wnosimy z łatwością, że zarówno zbiór W' jak i zbiór W'' jest nieskończony (i to nawet w sensie definicji 2.21) i przy tym $W' \cdot W'' = 0$. Zbiór W' jest więc nieskończony i jego uzupełnienie jest nieskończone, co dowodzi lemmatu. (Istnienie zbiorów W_n, spełniających warunki $W_n \neq 0$ i $W_m \cdot W_n = 0$ dla $m, n = 1, 2, \ldots$, $m \neq n$ jest konsekwencją pewnego twierdzenia Tarskiego; por. Lindenbaum i Tarski [2], théoreme 68).

Opierając się na trzech powyższych lemmatach możemy teraz łatwo dowieść słuszności następującego twierdzenia:

2.7. ***Twierdzenie.*** *Jeśli* $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ *jest zbiorem niesprzecznym, to* $S_2(X_1^2)\to S_1(X_1^2)\,\overline{\epsilon}\,Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\})$.

D o w ó d. Załóżmy, że

(1) $$S_2(X_1^2)\to S_1(X_1^2)\,\epsilon\,Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}).$$

W myśl twierdzenia 2 a) z pracy T a r s k i [2] zachodzi wówczas

$$(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\to[S_2(X_1^2)\to S_1(X_1^2)]\,\epsilon\,T;$$

zgodnie z lemmatem § 1, 6.2 pierwsze podniesienie typu tej funkcji zdaniowej jest też tezą:

$$[(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}]^1\to[S_2(X_1^2)\to S_1(X_1^2)]^1\,\epsilon\,T.$$

W myśl lemmatu 2.4 i § 1, 6.3 wynika stąd

$$S_2(X_1^3)\to S_1(X_1^3)\,\epsilon\,Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}),$$

albo

(2) $$\overline{S_1(X_1^3)}\to\overline{S_2(X_1^3)}\,\epsilon\,Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}).$$

Z (2) i lemmatów 2.5, 2.6 wyprowadzamy z łatwością

$$(X_1^2)[X_1^2\,\varepsilon\,X_1^3\leftrightarrow S(X_1^2)]\to(EX_1^2)\{\overline{S(X_1^2)}\,\&\,(X_2^2)[C(X_2^2;X_1^2)\to$$
$$\to\overline{S(X_2^2)}]\}\,\epsilon\,Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}),$$

co wobec $(EX_1^3)(X_1^2)[X_1^2\,\varepsilon\,X_1^3\leftrightarrow S(X_1^2)]\,\epsilon\,T$ daje

(3) $$(EX_1^2)\{\overline{S(X_1^2)}\,\&\,(X_2^2)[C(X_2^2;X_1^2)\to\overline{S(X_2^2)}]\}\,\epsilon\,Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}).$$

Opierając się na twierdzeniu 1.5 wnosimy z (3), że zbiór $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ jest sprzeczny; zatem założenie niesprzeczności tego zbioru pociąga za sobą fałszywość wzoru (1), c. b. d. o.

2.8. Twierdzenie 2.7 moglibyśmy wysłowić j. n.: w systemie logiki niepodobna dowieść twierdzenia, orzekającego, że jeśli dowolny zbiór A jest skończony w sensie D e d e k i n d a, to i klasa jego podzbiorów jest w tymże sensie skończona (pod założeniem wszakże, że pewnik nieskończoności nie prowadzi do sprzeczności). Analogiczne zagadnienie w stosunku do systemu aksjomatycznej teorii mnogości postawione było przez T a r s k i e g o ([1], str. 94) i F r a e n k l a ([2], str. 321 i [3], str. 36). O implikacji $S_2(X_1^2)\to$ $\to S_1(X_1^2)$ wspominają również R u s s e l l i W h i t e h e a d ([1], *124.58), zaznaczając, że gdyby była ona tezą, to możnaby udowodnić, że każdy zbiór skończony w sensie D e d e k i n d a (niere-

fleksywny) jest też skończony w zwykłym sensie (induktywny); w związku z tym zagadnieniem por. niżej tw. 3.1

Twierdzenie 2.7 zdaje się definitywnie wykazywać wyższość pojęcia skończoności, określonego tak, jak to czynią Russell i Whitehead [1], *120.01,02 nad pojęciem »nierefleksywności« t. zn. pojęciem skończoności w sensie Dedekinda przynajmniej wówczas, gdy stać będziemy na gruncie takiego systemu logiki, jakim zajmujemy się w niniejszej pracy. W samej rzeczy, pojmując skończoność, jako induktywność możemy z łatwością rozwinąć w naszym systemie logiki całą teorię zbiorów skończonych (por. np. Tarski [1]); gdybyśmy natomiast chcieli definiować pojęcie skończoności tak, jak to zaproponował Dedekind, to nie moglibyśmy udowodnić już tak prostego twierdzenia, że klasa podzbiorów zbioru skończonego jest skończona (por. Tarski [1], str. 92).

W związku z twierdzeniem 2.7 warto może zwrócić uwagę na rolę założenia niesprzeczności zbioru $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$, które w dowodzie tego twierdzenia tak ważną odgrywa rolę. Na pierwszy rzut oka wydać się może dość nienaturalne, że twierdzenie, dotyczące wzajemnej zależności dwu definicji skończoności, dowodzone jest przy założeniu, dotyczącym niesprzeczności pewnika nieskończoności, jest jednak jasne, że dla słuszności twierdzenia 2.7 tak jak je wysłowiliśmy wyżej założenie niesprzeczności pewnika nieskończoności jest niezbędne. Wynika to poprostu stąd, że gdyby zbiór $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ był sprzeczny, to każda w ogóle funkcja zdaniowa, a więc też i $S_2(X_1^2)\rightarrow S_1(X_1^2)$ należałaby do zbioru $Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\})$. Nieco mniej banalny jest fakt, że i twierdzenie

(1) $$S_2(X_1^2)\rightarrow S_1(X_1^2)\,\bar{\epsilon}\,T$$

okazuje się równoważne niesprzeczności pewnika nieskończoności. Z jednej bowiem strony założenie niesprzeczności pewnika nieskończoności pociąga za sobą wzór (1) jak to wynika natychmiast z twierdzenia 2.7, z drugiej zaś wzór (1) pociąga za sobą niesprzeczność zbioru

(2) $$Fl(\{(EX_1^2)\,S_2(X_1^2)\,\&\,\overline{S_1(X_1^2)}\})$$

(por. Tarski [2], tw. 3 b)), skąd wnosimy, że i zbiór $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$, zawarty w obec lemmatu 2.3 b) w zbiorze (2) jest niesprzeczny. Tak więc pytanie czy wzór (1) jest słuszny, czy nie, okazuje się

równoważne kwestii niesprzeczności pewnika nieskończoności, mimo, że na pozór w wzorze (1) nie ma zupełnie mowy o dopuszczalności wzgl. niedopuszczalności pojęcia zbioru nieskończonego. Widać stąd, że przy próbach rozwiązania zagadnienia (1) napotkamy na te same trudności, na jakie napotkano przy próbach przeprowadzenia ścisłego dowodu niesprzeczności infinitystycznej matematyki; na podstawie twierdzeń Gödela ([1], tw. XI) twierdzić nawet możemy, że pytanie, czy wzór (1) jest słuszny, czy nie nie da się w ogóle rozstrzygnąć na gruncie zwykłego systemu metamatematyki, w którym operujemy wyłącznie zmiennymi typów skończonych (jeśli przyjmiemy, że system ten jest niesprzeczny). Dowód wzoru (1) przeprowadzić moglibyśmy dopiero, wyposażając system metamatematyki zmiennymi typów pozaskończonych, w takim bowiem systemie daje się udowodnić niesprzeczność zbioru $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ (por. Tarski [3], str. 401 i 402). Z tego samego względu w tym wzbogaconym systemie metamatematyki udowodnić się daje twierdzenie, powstające z twierdzenia 2.7 przez opuszczenie założenia niesprzeczności pewnika nieskończoności. Widzimy stąd, że dowód wzoru (1) wzgl. wzmocnienie twierdzenia 2.7 przez opuszczenie założeń tego twierdzenia wymaga nader silnych środków logicznych; sam zaś dowód twierdzenia 2.7 wzgl. dowód twierdzenia

jeśli zbiór $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ *nie jest sprzeczny, to* $S_2(X_1^2)\rightarrow S_1(X_1^2)\,\bar{\epsilon}\,T$

daje się przeprowadzić zupełnie elementarnie, rozumowania bowiem, jakie przeprowadziliśmy w niniejszej pracy, dają się bez trudu sformalizować przy użyciu zmiennych najniższych typów logicznych, a nawet poprostu w arytmetyce liczb naturalnych.

Zauważmy wreszcie, że twierdzenie 2.7 wzmocnić się daje j. n.:

jeśli $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ *jest zbiorem niesprzecznym, to* $S_2(X_1^p)\rightarrow$
$\rightarrow S_1(X_1^p)\,\bar{\epsilon}\,Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\})$ *dla* $p=2,3,4,\ldots$

Dla dowodu powołać się wystarczy na fakt, że

$$(X_1^p)[S_2(X_1^p)\rightarrow S_1(X_1^p)]\rightarrow(X_1^2)[S_2(X_1^2)\rightarrow S_1(X_1^2)]\,\epsilon\,T \quad \text{dla } p=2,3,4,\ldots$$

i zastosować twierdzenie 2.7.

3. Prostym wnioskiem z twierdzenia 2.7 jest następujące:

3.1. ***Twierdzenie.*** ***Jeśli zbiór*** $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ *jest niesprzeczny, to* $S_2(X_1^2)\rightarrow S(X_1^2)\,\bar{\epsilon}\,Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\})$.

D o w ó d. Gdyby

$$S_2(X_1^2)\rightarrow S(X_1^2)\,\epsilon\, Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}),$$

to na mocy lemmatu 2.3 b) zachodziłoby

$$S_2(X_1^2)\rightarrow S_1(X_1^2)\,\epsilon\, Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}),$$

co w myśl twierdzenia 2.7 sprzeczne jest z założeniem niesprzeczności pewnika nieskończoności.

Twierdzenie 3.1 orzeka, że w tu rozważanym systemie logiki definicja skończoności D e d e k i n d a jest nierównoważna definicji zwykłej. Z twierdzenia tego łatwo wywnioskować, że pewnik wyboru jest niezależny od aksjomatów logiki. Przyjmijmy dla skrótu oznaczenie następujące:

3.2. $$\mathfrak{z}^p \overset{Df}{=} (X_1^{p+2})((X_1^{p+1})[X_1^{p+1}\,\varepsilon\, X_1^{p+2}\rightarrow(EX_1^p)\,X_1^p\,\varepsilon\, X_1^{p+1}]\,\&$$
$$\&(X_1^{p+1})(X_2^{p+1})[X_1^{p+1}\,\varepsilon\, X_1^{p+2}\,\&\,X_2^{p+1}\,\varepsilon\, X_1^{p+2}\,\&\,(EX_1^p)(X_1^p\,\varepsilon\, X_1^{p+1}\,\&$$
$$\&\,X_1^p\,\varepsilon\, X_2^{p+1})\rightarrow X_1^{p+1}\,Id\,X_2^{p+1}]\rightarrow(EX_1^{p+1})(X_2^{p+1})\{X_2^{p+1}\,\varepsilon\, X_1^{p+2}\rightarrow$$
$$\rightarrow(EX_1^p)(X_2^p)[X_2^p\,\varepsilon\, X_1^{p+1}\,\&\,X_2^p\,\varepsilon\, X_2^{p+1}\leftrightarrow X_1^p\,Id\,X_2^p]\}).$$

$\mathfrak{z}^p$ jest sformalizowaniem p e w n i k a w y b o r u dla zbiorów $p+1$-ego typu. Z definicji 3.2 wyprowadzamy natychmiast

3.3. L e m m a t: $\mathfrak{z}^2$ *jest pierwszym podniesieniem typu zdania* $\mathfrak{z}^1$.

Jak wiadomo, z pewnika wyboru wynika, że każdy zbiór skończony w sensie D e d e k i n d a jest też skończony w zwykłym sensie; dokładniej — zachodzi lemmat następujący:

3.4. L e m m a t: $\mathfrak{z}^2\rightarrow(X_1^2)[S_2(X_1^2)\rightarrow S(X_1^2)]\,\epsilon\, T$.

D o w ó d tego lemmatu otrzymujemy, formalizując rozumowanie R u s s e l l a i W h i t e h e a d a [1], *124.56.

Z lemmatu 3.4 wyprowadzamy natychmiast

3.5. L e m m a t: *jeśli zbiór* $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ *jest niesprzeczny, to* $\mathfrak{z}^2\,\bar{\epsilon}\, Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\})$ *i* $\mathfrak{z}^2\,\bar{\epsilon}\, T$.

W przeciwnym bowiem razie wywnioskowalibyśmy z lemmatu 3.4 $S_2(X_1^2)\rightarrow S(X_1^2)\,\epsilon\, Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\})$, co przeczy twierdzeniu 3.1.

Z lemmatów 3.5, 3.8 i lemmatu § 1, 6.2 wyprowadzamy jeszcze

3.6. ***Twierdzenie.*** *Jeśli zbiór* $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ *jest niesprzeczny, to* $\mathfrak{z}^1\,\bar{\epsilon}\, T$.

Twierdzenie to stwierdza niezależność pewnika wyboru od aksjomatów logiki; rozumując podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 2.7 udowodnić nawet moglibyśmy, że $\mathfrak{z}^1\bar{\epsilon}Fl(\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\})$ (pod założeniem, że pewnik nieskończoności nie jest sprzeczny). Co do roli założenia niesprzeczności zbioru $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$ w twierdzeniach 3.1 i 3.6 powtórzyć moglibyśmy te same uwagi, jakie uczyniliśmy w związku z twierdzeniem 2.7. Ponieważ — jak to łatwo sprawdzić — $\mathfrak{z}^p \rightarrow \mathfrak{z}^1 \epsilon T$ dla $p=1,2,\ldots$, więc jako dalsze wnioski z tw. 3.6 otrzymać jeszcze możemy twierdzenie: $\mathfrak{z}^p \bar{\epsilon} T$ *dla* $p=1,2,\ldots$ *i* $\mathfrak{z}^p\bar{\epsilon}Fl(\{EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\})$ *dla* $p=1,2,3,\ldots$ (*przy założeniu niesprzeczności zbioru* $\{(EX_1^2)\overline{S(X_1^2)}\}$).

4. Metoda relatywizacji kwantyfikatorów zastosować się daje i do szeregu innych problemów o podobnym charakterze jak te, którymi zajmowaliśmy się w numerach 2 i 3. W szczególności metoda ta okazuje się dostatecznie silna na to, aby rozstrzygnąć kwestię wzajemnej niezależności ciągu definicji skończoności, podanych przez Tarskiego ([1], str. 94): stosując metody, zbliżone do tych, jakie zastosowane były w pracy niniejszej wykazać można, że wszystkie te definicje są nierównoważne między sobą i wszystkie są słabsze niż definicja zwykła. Ten stan rzeczy nasunąć może przypuszczenie, że zwykła definicja skończoności jest najmocniejszą spośród własności, charakteryzujących pojęcie skończoności, bliższe badania okazują jednak, że przypuszczenie takie byłoby fałszywe. Mówiąc nieco dokładniej, zachodzi twierdzenie następujące: *dla każdej funkcji zdaniowej* α *takiej, że* $Fr(\alpha)=\{X_1^2\}$, *która czyni zadość warunkom*

$$(1)\qquad (X_{p+1}^1)[X_{p+1}^1 \,\epsilon\, X_1^2 \leftrightarrow (X_{p+1}^1 Id X_1^1 \vee X_{p+1}^1 Id X_2^1 \vee \ldots \vee X_{p+1}^1 Id X_p^1)] \rightarrow \alpha \,\epsilon\, T \qquad (p=1,2,\ldots)$$

skonstruować można funkcję zdaniową β *taką, że* $Fr(\beta)=\{X_1^2\}$ *i*

$$(2)\qquad (X_{p+1}^1)[X_{p+1}^1 \,\epsilon\, X_1^2 \leftrightarrow (X_{p+1}^1 Id X_1^1 \vee X_{p+1}^1 Id X_2^1 \vee \ldots \vee X_{p+1}^1 Id X_p^1)] \rightarrow \beta \,\epsilon\, T \qquad (p=1,2,\ldots)$$

$$(3)\qquad \beta \rightarrow \alpha \,\epsilon\, T, \quad \alpha \rightarrow \beta \,\bar{\epsilon}\, T.$$

Przyjmując więc w szczególności zamiast α funkcję $S(X_1^2)$ otrzymamy funkcję β, wyrażającą pewną własność $\mathfrak{f}$ zbiorów, przy czym ze względu na warunek (2) własność $\mathfrak{f}$ przysługuje każdemu zbiorowi, zawierającemu p elementów (gdzie p oznacza którąkolwiek

z liczb 1, 2, 3, ...) a jednak, jak widać z (3), nie jest (w rozważanym tu systemie logiki) równoważna pojęciu induktywności, aczkolwiek jest od niego nie słabsza.

Twierdzenia te opublikowane będą na innym miejscu, tu zaś zajmiemy się jeszcze powierzchownie kwestją możliwości rozszerzenia metod i wyników niniejszej pracy na systemy podstaw matematyki inne niż ten, którym zajmowaliśmy się powyżej. Przede wszystkim chodzi nam o przeniesienie tych wyników na teren aksjomatycznej teorii mnogości.

Okazuje się, że w pośród znanych obecnie układów aksjomatów teorii mnogości znajdują się zarówno takie, do których metody nasze dają się zastosować po dokonaniu w nich pewnych modyfikacji, jak również takie, w których metody te nie prowadzą do żadnych wyników. Do pierwszej grupy należą układy aksjomatów, które — wyrażając się ogólnikowo i nieściśle — nie wykluczają istnienia zbiorów nieskończonych, których elementy nie są zbiorami. Tu należy więc przede wszystkim oryginalna aksjomatyka Zermelo ([1], str. 262—267), a nadto różne uściślenia tej aksjomatyki jak np. układy, podane przez Skolema [1], § 1 i Quine'a [1]. Systemy te nie zawierają co prawda założenia o istnieniu nieskończenie wielu niezbiorów, nie trudno jednak pokazać, że założenie takie, dołączone do systemu nie może prowadzić do sprzeczności (por. Quine [1], uwagi do def. Γ 6, na str. 48). Systemy te wzbogacić można przy tym t. zw. pewnikiem podstawiania (por. np. Fraenkel [2], str. 309).

Dowody nierównoważności różnych definicyj skończoności, jak również dowód niezależności pewnika wyboru w tych systemach opierają się na tej samej myśli co dowody, podane w niniejszym paragrafie: związki logiczne, dające się wyrazić w języku teorii mnogości są niezmiennicze ze względu na przekształcenia jedno-jednoznaczne zbioru M wszystkich przedmiotów, nie będących zbiorami, w siebie. Mówiąc nieco dokładniej, jeśli wprowadzimy funkcję zdaniową $\theta(x)$, która orzeka, że istnieje podzbiór N zbioru M, zawierający prawie wszystkie elementy M taki, że zbiór oznaczony symbolem x jest niezmiennikiem każdego wzajemnie jednoznacznego przekształcenia M w siebie, które każdy element zbioru $M—N$ pozostawia bez zmiany i dokonamy zrelatywizowania kwantyfikatorów do funkcji $\theta(x)$, to wszystkie tezy teorii mnogości pozostaną po zrelatywizowaniu zdaniami prawdziwymi

(tezami) teorii mnogości, takie zaś np. zdanie jak pewnik wyboru stanie się negacją tezy. Główna trudność na jaką napotyka się przy przeprowadzeniu tego planu polega na ścisłym sformułowaniu funkcji zdaniowej $\theta(x)$ w terminach aksjomatycznej teorii mnogości; przede wszystkim chodzi o precyzyjne wysłowienie warunku *»x jest niezmiennikiem przekształcenia wzajemnie jednoznacznego zbioru M w siebie«*. Nie możemy tu wdawać się w szczegóły konstrukcji tej funkcji zdaniowej; opiera się ona na teorii liczb porządkowych, którą można wybudować w aksjomatycznej teorii mnogości (por. v. Neumann [1] i [2], str. 710—721), a nadto na możliwości ponumerowania (w obrębie samej teorii mnogości) wszystkich zbiorów przy pomocy liczb porządkowych: w numeracji tej przedmioty, nie będące zbiorami otrzymują numer 0, zbiory, złożone z przedmiotów, którym przyporządkowane są liczby $<\xi$ otrzymują numer co najwyżej ξ. Ta sui generis teoria typów logicznych w obrębie teorii mnogości pochodzi od Mirimanoffa ([1]) i nie została dotąd w literaturze opracowana w sposób dokładny; pewne uwagi na ten temat podaje Zermelo ([2], § 3) i Tarski ([3], str. 397, ods. [106]).

Z powyższego szkicu czytelnik łatwo spostrzeże, że metoda, o której mowa, pozostaje w ścisłym związku z pracami Fraenkla o niezależności pewnika wyboru (por. przede wszystkim jego pracę [1], a także [3] i [4]). Istotnie, myśl dowodu niezależności pewnika wyboru przy pomocy badania przekształceń zbioru indywiduów w siebie pochodzi od Fraenkla, przeprowadzenie jednak tej idei jest u Fraenkla co najmniej niewystarczające; abstrahując od różnych niejasności metodologicznej natury, samo sformułowanie pojęcia niezmienniczości zbioru ze względu na przekształcenia zbioru wszystkich niezbiorów w siebie, podane przez Fraenkla i potem modyfikowane przez ucznia jego Merzbacha ([1], str. 33—38) zawiera tylko intuicyjną treść tego pojęcia i nie nadaje się zupełnie do formalnego sprecyzowania, wskutek czego całe rozumowanie Fraenkla posiada tylko wartość intuicyjnych wskazówek. Rozumowanie, które naszkicowaliśmy wyżej, powstało w wyniku prób, dokonanych przez A. Lindenbauma i autora niniejszej pracy, a mających na celu uściślenie dowodu Fraenkla. Dzięki temu udało się nie tylko oczyścić rozumowanie Fraenkla z niejasnych punktów, ale zastosować je do innych układów aksjomatów, poprawniejszych pod

względem logicznym, niż dość niepoprawna aksjomatyka Fraenkla i wyposażonych nadto pewnikiem podstawiania; prócz tego uzyskać można było wyniki dalej idące niż twierdzenia Fraenkla jak np. rozstrzygnięcie stosunków wynikania między różnymi definicjami skończoności. Przez zastosowanie podobnej idei do systemu logiki doszliśmy również do wyników, którym poświęcony był niniejszy paragraf.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na fakt następujący: aksjomatyka teorii mnogości wraz z pewnikiem podstawiania pozwala dowieść istnienia bardzo wielkich mocy, bez porównania większych niż te, które skonstruować można w systemie logiki. Sądzić możnaby, że naszkicowana wyżej metoda dowodu niezależności pewnika wyboru jest niezależna od kwestii jakie moce dają się skonstruować w rozważanym systemie; po bliższym zbadaniu problem ten okazuje się jednak znacznie bardziej zawiły, jak wykazał bowiem Tarski po wzbogaceniu aksjomatyki odpowiednio skonstruowanym zdaniem, stwierdzającym istnienie bardzo wielkich mocy — pewnik wyboru przestaje być zdaniem niezależnym (zob. Tarski [4], str. 85 i 86).

Uwagi powyższe dotyczyły tylko pewnych układów aksjomatów, w których istnienie niezbiorów nie prowadzi do sprzeczności. Do innych układów, na gruncie których dowieść można, że jedynym przedmiotem, nie zawierającym żadnego elementu, jest zbiór pusty, metody nasze nie dają się zastosować. Tu należą systemy Fraenkla ([2], § 16), v. Neumanna [2], Robinsona [1] i Bernaysa [1]; o systemach tych pisze Zermelo ([2], str. 38 i 45), że gorzej się one nadają jako podstawa zastosowań teorii mnogości do matematyki, niż systemy, w których dopuszczalne jest istnienie niezbiorów. Metamatematyczne jednak badania nad tymi systemami są znacznie ciekawsze i znacznie trudniejsze, niż badania systemów, w których występują niezbiory, w których — tak na innym terenie głębokie — problemy, jak np. istnienie zdań nierozstrzygalnych, lub niezależność pewnika wyboru, sprowadzają się do faktów w gruncie rzeczy dość banalnych.